This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

University of Wisconsin
LIBRARY
Class SDH
Book .B12
Presented by

Elasticität und Festigkeit.

Die für die

Technik wichtigsten Sätze und deren erfahrungsmässige Grundlage.

Von

C. Bach,

Professor des Maschinen-Ingenieurwesens an der K. Technischen Hochschule Stuttgart.

Mit in den Text gedruckten Abbildungen und 15 Tafeln in Lichtdruck.

Zweite, vermehrte Auflage.

Berlin.

Verlag von Julius Springer.

1894.

Der Verfasser behält sich das Recht der Uebersetzung in fremde Sprachen vor.

Buchdruckerei von Gustav Schade (Otto Francke) Berlin N.

6117114

22 Ap '97
SDH
B12

Vorwort zur ersten Auflage.

Die vorliegende Arbeit, welche in zwei Lieferungen erschienen ist, von denen die erste, bis § 40 reichend, Ende Februar und die zweite Ende September 1889 abgeschlossen wurde, war — in beschränkterem Umfange und mit Hinweglassung dessen, was sonst anderwärts zusammengestellt zu finden — ursprünglich nur für die Zuhörer meines Vortrags über Elasticitätslehre bestimmt, mit dem Ziele, ihnen die erfahrungsmässigen Grundlagen der technischen Elasticitäts- und Festigkeitslehre zu bieten, ohne hierzu die für die Vorlesung verfügbare Zeit (3 Stunden im Sommersemester), welche mit Rücksicht auf die Behandlung der schwierigen Aufgaben dieses Gebiets an und für sich knapp bemessen erscheint, in Anspruch nehmen zu müssen. Wiederholten Anregungen schliesslich Folge leistend, übergebe ich dieselbe mit den hierdurch bedingten Erweiterungen der Oeffentlichkeit.

Sie geht davon aus, dass es in erster Linie auf die Erkenntniss des thatsächlichen Verhaltens der Materialien ankommt.

In Gemässheit dieses Standpunktes war zunächst der unanschauliche Begriff des Elasticitätsmoduls fallen zu lassen. Selbst wenn man von der verbreiteten und angesichts des wirklichen Verhaltens der Stoffe höchst bedenklichen Begriffsbestimmung absieht, nach der unter Elasticitätsmodul diejenige Kraft zu verstehen ist, welche ein Prisma vom Querschnitte 1 um seine eigene Länge ausdehnen würde, falls dies ohne Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze möglich wäre, so erweist sich der Umstand, dass der als Mass der Elasticität für die Betrachtungen und Rechnungen geschaffene Elasticitätsmodul umgekehrt proportional der Elasticität ist, als ausserordentlich störend. Durch Einführung des Dehnungskoefficienten (§ 2), dessen Grösse in geradem Ver-

hältnisse zur Formänderung steht, lässt sich dieser Uebelstand auf einfache Weise beseitigen. Demgemäss sind sämmtliche Rechnungen und Erörterungen mittelst des Dehnungskoefficienten durchgeführt. Die Gewinnung von Massen für den Dehnungsrest und für die Federung, d. i. die eigentliche Elasticität (§ 4) zum Unterschied von dem Masse für die Gesammtdehnung, ist damit ohne Weiteres gesichert (Schluss von § 4).

An die Stelle des der Anschauung unzugänglichen Schubelasticitätsmoduls tritt der Schubkoefficient (§ 29), dessen Bedeutung unmittelbar aus dem Vorgange der Schiebung folgt.

Sodann war der mit der Längsdehnung (Zusammendrückung) verknüpften Querzusammenziehung (Querdehnung) (§ 1, bezw. § 11) und deren Einfluss (§ 7, § 9, Ziff. 1, § 14, § 20, Ziff. 2, S. 82 [93][1]) u. s. w.) mehr Beachtung zu schenken, als dies sonst zu geschehen pflegt; zumal in weiten Kreisen z. Z. noch die Auffassung besteht, dass die Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen innerhalb gewisser Spannungsgrenzen allgemein giltig sei, gleichgiltig, ob ausser der Zug- oder Druckkraft, welche in Richtung der Stabachse wirkt, auch noch Kräfte senkrecht zu Letzterer thätig sind oder nicht.

Ferner mussten aus der meist ganz unbeachtet gelassenen Thatsache, dass die eben erwähnte Proportionalität überhaupt nicht für alle der Technik wichtigen Materialien vorhanden ist, die nöthigen Folgerungen gezogen werden. Dies trifft beispielsweise zu für das dem Maschinenbau unentbehrliche und daselbst so vielfach verwendete Gusseisen, bei dem die Dehnungen rascher wachsen, als die Spannungen; für das als Kraftübertragungsmittel so wichtige Leder, bei welchem das Umgekehrte stattfindet u. s. f. (insbesondere § 2, § 20, Ziff. 4, S. 85 [96] u. f., § 22, Ziff. 2, § 26, S. 113 [127], Fussbemerkung 1, § 35 und § 36, § 40, § 41, § 56, S. 324 [350] u. f., § 58, S. 344 [371[, Fussbemerkung, u. s. w.).

Was Einzelheiten anlangt, so glaubte ich Werth legen zu sollen auf die Klarstellung von Begriffen, wie Festigkeit (§ 3), Proportionalitäts- und Elasticitätsgrenze (§ 2, § 4), Knickbelastung (§ 23), Zerknickungskoefficient (§ 26), zulässige

[1]) Die eingeklammerten Zahlen bezeichnen jeweils die betreffende Stelle in der vorliegenden zweiten Auflage.

Anstrengung (§ 48, Ziff. 1), Einspannung (§ 53) u. s. w., sowie auf die Beseitigung von eingebürgerten Irrthümern. Wie oft wird beispielsweise die Berechnung auf Schub vorgeschrieben, wo Biegung massgebend ist (§ 40, § 52); wie allgemein ist bei Ermittlung des Dehnungskoefficienten (Elasticitätsmoduls) aus Biegungsversuchen der Einfluss der Schubkraft vernachlässigt worden (§ 22, Ziff. 1, § 52, Ziff. 2b); wie verbreitet ist die Auffassung der unbedingten Giltigkeit der Gleichung der einfachen Zug- und Druckfestigkeit, nach welcher es nur auf die Grösse des Querschnittes ankommt (§ 9, § 13, § 14); wie selten wird erkannt, dass die Druckfestigkeit bei Materialien, wie weichem Stahl u. s. w., die Fliess- oder Quetschgrenze ist (§ 11, Schluss; § 27, Ziff. 1, S. 122 [136]) u. s. f.

Die bedeutende Abhängigkeit der Biegungsfestigkeit des Gusseisens von der Querschnittsform war soweit festzustellen, dass sie rechnungsmässig berücksichtigt werden kann (§ 20, § 22, Ziff. 2).

Das immer dringender gewordene Bedürfniss, die Anstrengung auf Drehung beanspruchter Körper von nichtkreisförmigem Querschnitt mit mehr Sicherheit feststellen zu können, als dies bisher möglich war, verlangte eine eingehende Behandlung der hierher gehörigen Aufgaben (§ 32 bis § 36, § 43, § 47, § 49, § 50, § 52, Fussbemerkung S. 281 und 282 [301 und 302]). Dabei ergab sich die Nothwendigkeit, Formänderungen in's Auge zu fassen, die bisher bei Beurtheilung der Materialanstrengung ganz unbeachtet gelassen worden waren (§ 34, Ziff. 3).

Dem Umstande, dass die zulässige Schubspannung zur zulässigen Normalspannung ziemlich häufig nicht in dem Verhältnisse steht, wie dies die Elasticitätslehre ermittelte (Gl. 101, 102), habe ich — wie bereits in meinen Maschinenelementen 1880 gethan (S. 11, S. 205 u. f. daselbst) — durch Einführung des Anstrengungsverhältnisses Rechnung getragen (α_0 in § 48, Ziff. 2, auch β_0 in § 45, Ziff. 1).

Die Ausserachtlassung der schon ursprünglich vorhandenen Krümmung der Mittellinie bei auf Biegung beanspruchten Körpern erschien nicht mehr in dem Masse zulässig, wie dies bisher bei Berechnung von Kettenhaken und dergleichen ziemlich allgemein üblich war. Wenn auch die Endergebnisse der mit Rücksicht hierauf in § 54 angestellten Erörterungen nichts Neues bieten, so dürfte doch der hierbei eingeschlagene Weg zur

Gewinnung eines besseren Einblicks in die Anstrengungsverhältnisse, sowie dazu beitragen, dass Mancher, welcher bisher die ursprüngliche Krümmung nicht berücksichtigte, sie mindestens schätzungsweise bei Wahl der zulässigen Anstrengung in Betracht zieht.

In § 60 [61] war die Anstrengung der elliptischen Platte zu bestimmen; ausserdem waren bisher nicht beachtete Einflüsse festzustellen. Weitergehende Ermittlungen mussten namentlich bei den grossen Schwierigkeiten, welche hierauf bezüglichen Versuchen begegnen, zunächst unterbleiben.

Gern hätte ich Versuche der in § 56 behandelten Art in grösserem Umfange, sowie auch solche zu § 57 durchgeführt. Da mir aber weder für meine Lehrthätigkeit, noch für meine Versuchsarbeiten ein Assistent zur Verfügung steht, und der eigenen Arbeitskraft durch die Natur eine Grenze gezogen ist, auch die übrigen Mittel sehr knapp bemessen sind, so musste wenigstens vorerst Beschränkung geübt werden. Dieselbe Bemerkung hat auch Geltung für andere Abschnitte, insbesondere für § 61 [64].

Im Ganzen habe ich mich namentlich im Hinblick auf die Bedürfnisse der mitten in der Ausführung stehenden Ingenieure bestrebt, die einzelnen Entwicklungen so viel als thunlich für sich allein verständlich durchzuführen und den hierzu erforderlichen mathematischen Apparat unter Heranziehung von Versuchen nach Möglichkeit zu beschränken. Dass sich auf diesem Wege Aufgaben, welche sonst trotz ihrer grossen Wichtigkeit gar nicht oder nur ganz ausnahmsweise behandelt zu werden pflegen, recht klar und dazu fruchtbringender, als es bisher geschehen ist, erörtern lassen, davon dürften beispielsweise die §§ 33, 34 und 43, S. 220 [237] u. f., sowie § 52, Ziff. 2, Zeugniss ablegen. Die Thatsache, dass die vor vier Jahrzehnten von de Saint Venant gegebene Lösung der Torsionsaufgabe — ungeachtet ihrer wissenschaftlichen Strenge — nur ganz vereinzelt Eingang in die technische Literatur gefunden hat, dürfte vorzugsweise in dem Mangel an verhältnissmässiger Einfachheit der zur Lösung führenden Rechnungen begründet sein.

Um den Umfang des Buches innerhalb einer gewissen Grenze zu halten, wurde die zweite Lieferung etwas weniger umfassend gestaltet, als ursprünglich geplant war, wodurch übrigens die Anschauung über die wirklichen Vorgänge, über das thatsächliche Verhalten des Materials eine Beeinträchtigung nicht erfährt. Es

erschien dies um so mehr zulässig, als seit Abschluss der ersten Lieferung das v. Tetmajer'sche Werk: „Die angewandte Elasticitäts- und Festigkeitslehre" mit einer Fülle an Beobachtungsmaterial zur Ausgabe gelangt ist (siehe auch des Verfassers Besprechung dieses Buches in der Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure 1889, S. 452 bis 455 und S. 473 bis 479) und überdies die werthvollen Arbeiten von Mehrtens vorliegen. Beispiele und Erfahrungszahlen glaubte ich ohnehin als naturgemäss in meine Maschinenelemente gehörig, dahin verweisen zu sollen.

Möge auch diese Arbeit, welche nicht mehr als ein Schritt in neuer Richtung sein soll, zur Förderung der Technik und damit der Industrie beitragen, indem sie die Bedeutung der Erkenntniss des thatsächlichen Verhaltens der Materialien klarlegt und indem aus ihr erhellt,

dass es nicht genügt, von dem Satze der Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen allein ausgehend, das ganze Gebäude der Elasticität und Festigkeit auf mathematischer Grundlage aufzubauen,

dass es vielmehr für den Konstrukteur — namentlich, wenn er in voller Erkenntniss der wirklichen Verhältnisse die Abmessungen festsetzen und sich nicht in dem Geleise hergebrachter Formen halten will — nothwendig erscheint, immer und immer wieder die Voraussetzungen der einzelnen Gleichungen, welche er benützt, im Spiegel der Erfahrungen, soweit solche vorliegen, sich zu vergegenwärtigen, und die auf dem Wege der Ueberlegung, der mathematischen Ableitung gewonnenen Beziehungen hinsichtlich des Grades ihrer Genauigkeit zu beurtheilen, soweit dies bei dem jeweiligen Stande unserer Erkenntnisse überhaupt möglich ist,

und dass da, wo die letzteren und die Ueberlegung — Aufsuchung und Ausbildung neuer Methoden eingeschlossen — nicht ausreichen, in erster Linie durch den Versuch Fragestellung an die Natur zu erfolgen hat.

Stuttgart, den 30. September 1889.

C. Bach.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten — abgesehen von der Umarbeitung des Abschnittes über die plattenförmigen Körper — in der Hauptsache durch Ergänzungen, entsprechend einer Vermehrung des Textes um 56 Seiten. Beschränkung in dieser Hinsicht zu üben, erschien schon deshalb angezeigt, um dem Buche das Eindringen in weitere Kreise zu sichern, wozu gehört, dass der Preis desselben eine gewisse Grenze nicht überschreitet. Hierin lag auch der Grund, der veranlasste, davon abzusehen, die ursprüngliche Idee, eine Anzahl von Aufgaben nebst Lösungen aufzunehmen, zur Ausführung zu bringen.

Die Grundgedanken, welche bei Abfassung der ersten Auflage massgebend waren, sind die leitenden geblieben, weshalb ich in dieser Beziehung nichts hinzuzufügen habe. Dass die Ersetzung des Elasticitätsmoduls durch den Dehnungskoefficienten nicht ohne Bemängelung abgehen würde, war vorauszusehen. Demgegenüber kann ich nur auf die Arbeit selbst, insbesondere auf die Fussbemerkung zu § 2, verweisen, welche durch Uebernahme einer bereits in der zweiten Auflage meiner Maschinenelemente gegebenen Darlegung ergänzt worden ist. Im Laufe der Zeit wird sich von selbst entscheiden, ob die Begriffe „Elasticitätsmodul“ und „Schubelasticitätsmodul“ das Feld behaupten oder ob die Begriffe „Dehnungskoefficient“ und „Schubkoefficient“ an deren Stelle treten werden.

Im Ganzen hat sich die Arbeit einer so wohlwollenden Aufnahme seitens der Fachgenossen zu erfreuen gehabt, dass ich nicht umhin kann, für die ausserordentliche Förderung, welche hierin liegt, zu danken. Die Arbeitskraft des Einzelnen ist eine begrenzte und das Arbeitsfeld des Maschineningenieurwesens ein so ausgedehntes, dass der Einzelne selbst nur einen kleinen Beitrag durch das in seinen Arbeiten enthaltene Neue zu leisten vermag, infolgedessen dieses der entschiedenen Förderung durch die Fachgenossen bedarf, soll der Fortschritt ein allgemeiner und damit ein erheblicher werden.

Stuttgart, den 1. Juni 1894.

C. Bach.

Inhaltsverzeichniss.

Erster Abschnitt.

Die einfachen Fälle der Beanspruchung gerader stabförmiger Körper durch Normalspannungen (Dehnungen).

Einleitung.

Seite

§ 1. Formänderung. Spannung 1
§ 2. Dehnung. Dehnungskoefficient. Proportionalitätsgrenze. Fliessgrenze 2
§ 3. Bruchbelastung. Festigkeit 7
§ 4. Gesammtdehnung. Dehnungsrest. Federung. Elasticität 9
§ 5. Einfluss der Zeit. Elastische Nachwirkung 14

I. Zug.

§ 6. Gleichungen der Zugelasticität und Zugfestigkeit.
1. Stab mit gleichem Querschnitt 16
2. Stab mit veränderlichem Querschnitt 17
§ 7. Mass der Zusammenziehung. Kräfte senkrecht zur Stabachse. Gehinderte Zusammenziehung 19
§ 8. Zugproben 22
§ 9. Einfluss der Form des Stabes.
1. Einfluss der Stabform, welche der Querschnittsverminderung (Zusammenziehung) hinderlich ist 28
2. Einfluss der Länge und des Durchmessers 32
3. Einfluss der Querschnittsform 34
§ 10. Versuchsergebnisse über den Einfluss der Zeit auf Festigkeit, Dehnung und Querschnittsverminderung 39

II. Druck.

§ 11. Formänderung. Druckfestigkeit 42
§ 12. Gleichungen der Druckelasticität und der Druckfestigkeit 46
§ 13. Druckversuche. Einfluss der Gestalt des Körpers auf die Druckfestigkeit.
1. Die Belastung trifft die ganze Stirnfläche des Probekörpers . . 49
2. Die Belastung unmittelbar trifft nur einen Theil der Querschnittsfläche des Probekörpers 55
§ 14. Hinderung der Querdehnung 59
§ 15. Theorien der Druckfestigkeit 61

III. Biegung.

§ 16. Gleichungen der Biegungsanstrengung und der elastischen Linie unter der Voraussetzung, dass die Ebene des Kräftepaares den Querschnitt in einer der beiden Hauptachsen schneidet 63

Seite

§ 17. Trägheitsmomente.
1. Rechteck 69
2. Dreieck 69
3. Kreis 70
4. Ellipse 70
5. Zusammengesetzte Querschnitte.
a) Rechnerische Bestimmung 71
b) Zeichnerische Bestimmung 72
6. Zusammenstellung 75

§ 18. Fälle bestimmter Belastungen.
1. Der Stab ist einerseits eingespannt, am anderen Ende frei . 76
2. Der Stab liegt beiderseits auf Stützen 78
3. Der Stab ist beiderseits eingespannt 82

§ 19. Körper von gleichem Widerstande.
1. Der Stab mit rechteckigem Querschnitt von gleicher Breite ist einerseits eingespannt, am anderen freien Ende belastet . 85
2. Der Stab wie unter 1, jedoch von gleicher Höhe 87
3. Der Stab liegt beiderseits auf Stützen und ist zwischen beiden belastet 88

§ 20. Die bei der Entwicklung der Gleichungen in § 16 gemachten Voraussetzungen und ihre Zulässigkeit.
1. Die äusseren Kräfte ergeben nur ein Kräftepaar 93
2. Die Fasern üben einen gegenseitigen Einfluss auf einander nicht aus 93
3. Die Querschnitte bleiben eben 96
4. Der Dehnungskoefficient ist unveränderlich 96
5. Zusammenfassung 100

§ 21. Biegungsanstrengung und Durchbiegung unter der Voraussetzung, dass die Ebene des Kräftepaares keine der beiden Hauptachsen des Querschnittes in sich enthält.
1. Hauptachsen. Hauptträgheitsmomente 101
2. Biegungsanstrengung 104
3. Durchbiegung 106

§ 22. Biegungsversuche.
1. Biegungsversuche im Allgemeinen 108
2. Abhängigkeit der Biegungsfestigkeit des Gusseisens von der Querschnittsform 110
3. Einfluss der Gusshaut 113

IV. Knickung.

§ 23. Wesen der Knickung 115
§ 24. Knickbelastung (Euler'sche Gleichung) 118
§ 25. Zulässige Belastung gegenüber Knickung 123
§ 26. Navier'sche (Schwarz'sche) Knickungsformel 125
§ 27. Knickungsversuche 133

Zweiter Abschnitt.

Die einfachen Fälle der Beanspruchung gerader stabförmiger Körper durch Schubspannungen (Schiebungen).

Einleitung.

Seite

§ 28. Schiebung 139
§ 29. Schubspannung. Schubkoefficient 142
§ 30. Paarweises Auftreten der Schubspannungen 144
§ 31. Schiebungen und Dehnungen. Schubkoefficient und Dehnungskoefficient.
1. Mit der Schiebung verknüpfte Dehnung und deren grösster Werth 147
2. Beziehung zwischen Dehnungskoefficient und Schubkoefficient . 149

V. Drehung.

§ 32. Stab von kreisförmigem Querschnitt 153
§ 33. Stab von elliptischem Querschnitt.
1. Formänderung 160
2. Schubspannungen 161
§ 34. Stab von rechteckigem Querschnitt.
1. Formänderung 167
2. Schubspannungen 169
3. Gehinderte Ausbildung der Querschnittswölbung 176
§ 35. Drehungsversuche.
1. Abhängigkeit der Drehungsfestigkeit des Gusseisens von der Querschnittsform 178
2. Drehungswinkel 198
§ 36. Zusammenfassung 201
Kreis, Ellipse, Sechseck, Rechteck, Dreieck, ⊢⊣-Querschnitt, Kreuzquerschnitt, ⌊⌋-Querschnitt, Winkelquerschnitt.

VI. Schub.

§ 37. Schubanstrengung unter der Voraussetzung gleichmässiger Vertheilung der Schubspannungen über den Querschnitt 205
§ 38. Schubspannungen im rechteckigen Stabe 206
§ 39. Schubspannungen im prismatischen Stabe von beliebigem, jedoch hinsichtlich der Kraftebene symmetrischem Querschnitt 210
§ 40. Schubversuche 219

Dritter Abschnitt.

Formänderungsarbeit gerader stabförmiger Körper bei Beanspruchung auf Zug, Druck, Biegung, Drehung oder Schub.

§ 41. Arbeit der Längenänderung 228
§ 42. Arbeit der Biegung 232
§ 43. Arbeit der Drehung 235
§ 44. Arbeit der Schiebung 241

Vierter Abschnitt.

Zusammengesetzte Beanspruchung gerader stabförmiger Körper.

VII. Beanspruchung durch Normalspannungen (Dehnungen). Zug, Druck und Biegung.

Seite

§ 45. Der einerseits befestigte prismatische Stab wird durch eine zur Stabachse parallele, jedoch excentrisch zu ihr gelegene Kraft belastet.
1. Die Kraft wirkt ziehend 244
2. Die Kraft wirkt drückend 246
a) Der Stab ist schlank und der Hebelarm klein 247
b) Der Stab ist schlank und der Hebelarm im Verhältniss zu den Abmessungen des Querschnittes gross 250
c) Die Querschnittsabmessungen des Körpers sind im Vergleich zur Länge desselben und zur Grösse des Hebelarmes so bedeutend, dass eine Biegung von Erheblichkeit nicht eintritt 251

§ 46. Einfluss des Widerstandes beim Gleiten der Oberfläche des beiderseits gelagerten und in der Mitte belasteten Stabes gegenüber den Stützen infolge der Durchbiegung 255

VIII. Beanspruchung durch Schubspannungen (Schiebungen).

§ 47. Schub und Drehung 259

IX. Beanspruchung durch Normalspannungen (Dehnungen) und Schubspannungen (Schiebungen).

§ 48. Grösste Anstrengung bei gleichzeitig vorhandener Dehnung (Normalspannung) und Schiebung (Schubspannung).
1. Begriff der zulässigen Anstrengung des Materials 261
2. Ermittlung der grössten Anstrengung 264

§ 49. Zug (Druck) und Drehung 274

§ 50. Biegung und Drehung.
1. Kreisquerschnitt 276
2. Elliptischer Querschnitt.
a) Die Ebene des biegenden Kräftepaares läuft parallel zur kleinen Achse der Ellipse 276
b) Die Ebene des biegenden Kräftepaares läuft parallel zur grossen Achse der Ellipse 277
3. Rechteckiger Querschnitt.
a) Die Ebene des biegenden Kräftepaares läuft parallel zur kurzen Seite des Rechtecks 279
b) Die Ebene des biegenden Kräftepaares läuft parallel zur langen Seite des Rechtecks 279
c) Die Ebene des biegenden Kräftepaares hat keine der beiden unter a) und b) bezeichneten Lagen 279

Seite

§ 51. Zug (Druck) und Schub 281

§ 52. Biegung und Schub.

1. Anstrengung des Materials.

a) Kreisquerschnitt 283

b) Rechteckiger Querschnitt 291

c) I-Querschnitt 293

2. Formänderung.

a) Im Allgemeinen 294

b) Durchbiegung mit Rücksicht auf die Schubkraft . . . 298

§ 53. Frage der Einspannung eines Stabes 309

Fünfter Abschnitt.

Stabförmige Körper mit gekrümmter Mittellinie.

I. Die Mittellinie ist eine einfach gekrümmte Kurve, ihre Ebene Ort der einen Hauptachse sämmtlicher Stabquerschnitte, sowie der Richtungslinien der äusseren Kräfte.

§ 54. Dehnung. Spannung. Krümmungshalbmesser.

1. Anstrengung des Materials 319

2. Werthe von $x = -\frac{1}{f}\int \frac{\eta}{r+\eta}\,df$ für verschiedene Querschnitte.

a) Rechteck 327

b) Kreis, Ellipse 328

c) Trapez 330

d) Dreieck 331

e) Zusammengesetzte Querschnitte 331

3. Krümmungshalbmesser 332

4. Aenderung der Koordinaten der Mittellinie 334

§ 55. Fälle bestimmter Belastungen.

1. Offener Haken trägt eine Last 337

2. Hohlcylinder, welcher als Walze dient, ist über seine Länge gleichmässig belastet 341

§ 56. Versuchsergebnisse 348

II. Die Mittellinie ist eine doppelt gekrümmte Kurve.

§ 57. Die gewundenen Drehungsfedern.

1. Die cylindrischen Schraubenfedern 355

2. Die Kegelfedern 357

Sechster Abschnitt.

Gefässe.

Seite

§ 58. Hohlcylinder.
1. Innerer und äusserer Druck 360
2. Innerer Ueberdruck 367
3. Aeusserer Ueberdruck 374

§ 59. Hohlkugel.
1. Innerer Ueberdruck 376
2. Aeusserer Ueberdruck 377

Siebenter Abschnitt.

Plattenförmige Körper.

§ 60. Ebene kreisförmige Platte (Scheibe).
1. Ermittlung der Anstrengung auf dem Wege der Rechnung . 380
2. Vergleichung der Voraussetzungen, welche bei den unter Ziff. 1 durchgeführten Rechnungen gemacht worden sind, mit den thatsächlichen Verhältnissen 395
3. Versuchsergebnisse 397
4. Näherungsweg zur Ermittlung der Anstrengung 400

§ 61. Ebene elliptische Platte 405

§ 62. Ebene quadratische Platte 416

§ 63. Ebene rechteckige Platte 420

§ 64. Versuchsergebnisse 422

Bedeutung der in den Gleichungen auftretenden Buchstabengrössen . . . 429

Berichtigungen.

S. 108, Zeile 4 von oben lies: „Fig. 51“.
S. 113, „ 9 „ „ „ : „Fig. 47“.
S. 161, „ 5 „ „ „ : „P'“.
S. 180, „ 5 „ unten „ : „vergl. Fig. 94“.
S. 206, „ 3 „ oben „ : „k_s“.
S. 207, „ 10 „ „ „ : „Fig. 41“.
S. 211, „ 12 „ „ „ : „P'“.
S. 240, in Gleichung 154 „ : „$b^2 + h^2$“.
S. 302, Zeile 4 von oben „ : „$z^2 d\eta\, dz$“.
„ 15 „ „ im Nenner: „a^4“.
S. 306, „ 5 „ unten lies: „Abstand η“.
S. 317, „ 5 „ „ „ : „$CO\,CC_1\,O_1\,C_1$“.
S. 320, „ 3 „ „ „ : „$C_1'\,O_1'\,C_1'$“.
S. 335, „ 9 „ oben „ : „Tangente $P\,T$“.
S. 348, „ 17 „ „ „ : „S. 192“.
S. 369, „ 10 „ unten „ : „1887“.
S. 385, unterste Zeile lies im Zähler: „$d\,(x\,\sigma_x)$“.
S. 386, Zeile 3 und 1 von unten lies: „$P + \pi\, x^2\, p$“.
S. 387, „ 5 von oben lies: „$P + \pi\, x^2\, p$“.
S. 388, in Gleichung 261 „ : „$\frac{c_2}{x}$“

S. 389, Zeile 10 von oben lies zu Anfang: „$\frac{b}{2}\left[\frac{\frac{d}{dx}(ln\,x)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)}\right]_{x=0} =$“

S. 391, in den beiden letzten Gleichungen lies: „$\left(\frac{3m+1}{m+1}r^2 - 3x^2\right)$“ und „$\left(\frac{3m+1}{m+1}r^2 - x^2\right)$“.

S. 400, Zeile 3 u. 4 von oben lies: „diese Kraft vermindert, Anziehen derselben sie vermehrt,“.

S. 412, „ 2 „ 4 „ „ „ : „$\frac{3}{8}n^4$“.

S. 413, „ 5 von oben lies: „$0{,}6\left(\frac{b}{a}\right)^4$“.

S. 417, „ 9 „ „ „ : „deutlicher“.

S. 418, „ 2 „ unten „ : „$\frac{1}{3\mu}\sqrt{\frac{1}{2}\,k_b\,a\,h^3}$“.

S. 421, „ 2 „ „ „ : „$h \geqq \frac{1}{2}\,a\sqrt{\mu\,\frac{p}{k_b}}$“.

S. 430, „ 20 „ oben „ : „(§ 61)“.

Erster Abschnitt.

Die einfachen Fälle der Beanspruchung gerader stabförmiger Körper durch Normalspannungen (Dehnungen).

Einleitung.

§ 1. Formänderung. Spannung.

Der gerade stabförmige Körper, Fig. 1, welchen wir uns als Kreiscylinder vorstellen wollen, besitze die Länge l und den Durchmesser d, also den Querschnitt $f = \frac{\pi}{4} d^2$. Derselbe werde jetzt — Fig. 2 — von zwei Kräften PP ergriffen, welche gleichmässig über die beiden Endquerschnitte vertheilt angreifen und deren Richtung mit der Stabachse zusammenfällt. Ihre Grösse liege unterhalb der Grenze, bei welcher eine Aufhebung des Zusammenhanges des Stabes, ein Zerreissen des letzteren, eintreten würde; sie halten sich demnach an dem Stabe das Gleichgewicht.

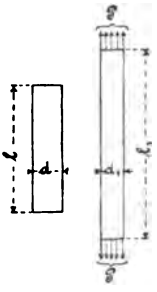


Fig. 1. Fig. 2.

Unter der Einwirkung dieser Kräfte

a) vergrössert sich die Länge des Stabes von l auf l_1, d. h. um $l_1 - l = \lambda$

und

b) vermindert sich der Durchmesser des Stabes von d auf d_1, d. h. um $d - d_1 = \delta$.

Es findet also gleichzeitig eine Ausdehnung in Richtung der Stabachse und eine Zusammenziehung (Kontraktion) senkrecht zu derselben statt. Die Letztere erweist sich übrigens weit kleiner als die Erstere (vergl. § 7). Die Aenderung der Form, welche der Körper durch die ihn ergreifenden Kräfte $P P$ erfährt, ist hiernach eine doppelte, wenn auch verschieden grosse.

Wir denken uns in dem Stabe, an welchem sich die Kräfte PP das Gleichgewicht halten, einen Querschnitt. Die auf beiden Seiten desselben liegenden Stabtheile werden in Folge des Vorhandenseins dieser äusseren Kräfte mit gewissen, über den Querschnitt vertheilten Kräften auf einander einwirken. Diese inneren Kräfte, bezogen auf die Flächeneinheit, heissen Spannungen, und insofern zum Ausdruck gebracht werden soll, dass dieselben senkrecht zum Querschnitt gerichtet sind, Normalspannungen.

Unter den Voraussetzungen gleichmässiger Vertheilung der Kräfte PP über die beiden Endquerschnitte des Stabes und durchaus gleichartiger Beschaffenheit des Stabmaterials wird auch die Spannung für die einzelnen Theile des in Betracht gezogenen Stabquerschnittes gleich gross sein. Bezeichnen wir dieselbe mit σ, so erscheint sie bestimmt durch die Gleichung

$$\sigma = \frac{P}{f} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

Streng genommen müsste hierin f denjenigen Querschnitt bedeuten, welchen der Stab thatsächlich besitzt, während er durch P belastet ist. Wie wir oben bei b) sahen, ändert sich unter Einwirkung der äusseren Kräfte nicht blos die Länge, sondern auch der Durchmesser des Körpers und damit auch der Querschnitt. Unter Umständen kann diese Querschnittsänderung, welche abhängt von der verhältnissmässigen Grösse der Belastung und der Art des Materials, von Bedeutung werden. Aus diesem Grunde ist es nothwendig, festzuhalten, dass die Gleichung 1 die Spannung σ bezogen auf den ursprünglichen Stabquerschnitt liefert, sofern, wie oben angenommen, f den Querschnitt des unbelasteten Stabes bezeichnet.

§ 2. Dehnung. Dehnungskoefficient. Proportionalitätsgrenze. Fliessgrenze.

Die absolute Grösse λ der Längenänderung (vergl. § 1, a) hängt ab von der ursprünglichen Länge l des Stabes. Um sich für Zwecke der Rechnung von dieser Abhängigkeit zu befreien, pflegt man die auf die Längeneinheit bezogene Längenänderung

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

anzugeben. Diese verhältnissmässige (specifische) Längenänderung ε wird dann kurz mit Dehnung bezeichnet.

Die Bestimmung derselben durch die Gleichung 2 setzt für den Fall, dass die ursprüngliche Länge l nicht eine sehr kleine Grösse ist, voraus: es sei die Dehnung an allen Stellen der Strecke l gleich gross.

Die Dehnung, welche sich für die Spannung (vergl. § 1) gleich der Krafteinheit, d. i. das Kilogramm ergiebt, soll Dehnungskoefficient genannt und mit α bezeichnet werden. Sie findet sich zu

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{\lambda}{l}\frac{1}{\sigma} = \frac{\lambda}{l}\frac{f}{P}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Der Dehnungskoefficient ist demnach diejenige Zahl, welche angiebt, um welche Strecke sich ein Stab von der Länge 1 bei einer Belastung von 1 Kilogramm auf die Flächeneinheit (Quadratcentimeter) dehnt, oder kurz: die Zunahme der Längeneinheit für das Kilogramm Spannung.

Diese Begriffsbestimmung liefert unmittelbar die Dehnung als Produkt aus Spannung und Dehnungskoefficient, d. i.

$$\varepsilon = \alpha\,\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

und die Ausdehnung des ursprünglich l langen Stabes

$$\lambda = \alpha\,\sigma\,l^{1}),$$

sowie die Spannung als den Quotienten: Dehnung durch Dehnungskoefficienten, d. i.

---

[1]) Dieser Ausdruck entspricht ganz demjenigen, welcher sich für die Ausdehnung eines Stabes durch die Wärme ergiebt, wie folgende Betrachtung deutlich zeigt.

Ein Stab von der Länge l_a und der Temperatur t_a wird auf die Temperatur t_e gebracht. Hierbei dehnt sich derselbe aus um

$$\alpha_w\,(t_e - t_a)\,l_a,$$

sofern α_w den Längenausdehnungskoefficienten durch die Wärme, d. h. die Zunahme der Längeneinheit für 1° Erwärmung, bedeutet.

Ein Stab, welcher anfangs so belastet ist, dass in seinen Querschnitten die Spannung σ_a herrscht, besitzt in diesem Zustande die Länge l_a. Durch Vermehrung der Belastung steigt die Spannung auf σ_e. Hierbei dehnt sich der Stab aus um

$$\alpha\,(\sigma_e - \sigma_a)\,l_a,$$

worin α den oben erörterten Dehnungskoefficienten bedeutet.

Wie ersichtlich, tritt einfach an die Stelle des Temperaturunterschiedes $t_e - t_a$

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 5)$$

Der reciproke Werth von α wird als Elasticitätsmodul bezeichnet.

Nach Gl. 4 kann der Dehnungskoefficient auch als diejenige Zahl erklärt werden, mit welcher die Spannung (Normalspannung) zu multipliciren ist, um die Dehnung zu erhalten.

---

der Spannungsunterschied $\sigma_e - \sigma_a$ und an die Stelle des Längenausdehnungskoefficienten durch die Wärme der Dehnungskoefficient. Beide Erfahrungszahlen sind hierbei allerdings als unveränderlich vorausgesetzt, wenigstens innerhalb dieser Temperatur- beziehungsweise Spannungsunterschiede.

Es ist bisher in der technischen Literatur üblich gewesen, nicht mit dem Dehnungskoefficienten α, sondern mit dem reciproken Werthe desselben, d. h. mit $\frac{1}{\alpha}$, zu rechnen, und für diesen den Begriff des Elasticitätsmoduls einzuführen. Derselbe ist dann erklärt worden als diejenige Kraft, welche ein Prisma vom Querschnitt 1 um seine eigene Länge ausdehnen würde, falls dies ohne Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze möglich wäre. (So z. B. Weisbach, Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik, 1. Band, 5. Auflage, S. 386, u. A.; Reuleaux sagt in der vierten Auflage seines Konstrukteurs, S. 1: „Elasticitätsmodul ist diejenige Spannung, bei welcher ein prismatischer, in seiner Längenrichtung beanspruchter Körper um seine ganze Länge ausgedehnt oder zusammengepresst wird [eine solche Formänderung als möglich vorausgesetzt].“) Dies liefert für das schmiedbare Eisen rund 2000000 kg. Man hat sich also diese Kraft von zwei Millionen Kilogramm auf ein schmiedeisernes Prisma von 1 qcm Querschnitt wirkend vorzustellen. In Wirklichkeit würde bei etwa 1500 kg schon die Proportionalitätsgrenze, innerhalb welcher überhaupt die Gleichungen 3 bis 5 giltig sind, überschritten und voraussichtlich bei 4000 kg der Stab bereits zerrissen sein!

Verfasser ist der Ansicht, dass eine solche, mit dem thatsächlichen Verhalten des Materials nicht im Einklang stehende Begriffsbestimmung höchst bedenklich erscheint und jedenfalls nicht ohne den dringendsten Zwang, oder ohne durchschlagende Nützlichkeitsgründe als zulässig bezeichnet werden kann. Seines Erachtens muss der Grundbegriff der ganzen Elasticitäts- und Festigkeitslehre, d. i. die Erfahrungszahl, welche Dehnung und Spannung verbindet, so erklärt werden, wie es dem thatsächlichen Verhalten des Materials entspricht, damit dieser Grundbegriff und mit ihm die Hauptgesetze dieses Verhaltens in Fleisch und Blut übergehen. Das ist für den mitten in der Ausführung stehenden, zu raschen Entschlüssen veranlassten Techniker eine Nothwendigkeit. Die Bedeutung von α als Zunahme der Längeneinheit für das Kilogramm Spannung ist eine so einfache und natürliche, dass, wenn nicht die Macht der Gewohnheit in Betracht käme, es nicht erklärlich erscheinen würde, dass der un-

Für eine Anzahl von Stoffen, z. B. Schmiedeisen, Stahl u. s. w., erweist sich innerhalb gewisser Belastungsgrenzen der Dehnungskoefficient α als gleichbleibend, d. h.

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \text{konstant.}$$

Dann besteht innerhalb eines bestimmten Spannungsgebietes Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen. Die Spannung, bis zu welcher hin diese Proportionalität stattfindet, führt den Namen Proportionalitätsgrenze.

---

anschauliche Begriff des Elasticitätsmoduls — dieses bleibt er, auch wenn andere Erklärungen als die oben besprochene aufgestellt werden — nicht schon längst von der technischen Literatur über Bord geworfen ist.

Der Umstand, dass es an einzelnen Stellen für Rechnungszwecke bequemer erscheint, an Stelle von α mit $\frac{1}{\alpha}$ zu rechnen, wobei übrigens wieder die Macht der Gewohnheit und zwar ganz erheblich einwirkt, berechtigt noch lange nicht dazu, $\frac{1}{\alpha}$ zum Grundbegriff der Elasticitäts- und Festigkeitslehre zu machen, deren Aufgabe doch schliesslich darin besteht, das wirkliche Verhalten des Materials gegenüber der Einwirkung äusserer Kräfte klarzulegen, und nicht blos der Rechnung, sondern namentlich auch der Anschauung möglichst zugänglich zu machen.

Weiter kommt in Betracht, dass die Zahl, welche Dehnungen und Spannungen verbindet, naturgemäss ein Mass für die Elasticität des Materials zu bilden hat, und zwar derart, dass, je elastisch nachgiebiger ein Stoff ist, um so grösser diese Zahl sein muss. Nun ist aber der Elasticitätsmodul, d. h. $\frac{1}{\alpha}$, umgekehrt proportional der Grösse der Elasticität, sodass einem Material, welches eine grössere Dehnung ergiebt, dessen Nachgiebigkeit also bedeutender ist, ein kleinerer Elasticitätsmodul entspricht, und umgekehrt. Dies erweist sich oft recht unbequem, namentlich für den, der sich mit dem Material selbst zu beschäftigen hat.

Der Dehnungskoefficient α steht in geradem Verhältnisse zur Formänderung, ist also thatsächlich ein direktes Mass derselben. Dieses, übrigens in der Physik schon längst verwendete Mass erinnert, indem es sich dem — im Allgemeinen ebenfalls nicht konstanten — Wärmeausdehnungskoefficienten an die Seite stellt, gleichzeitig daran, dass dieser streng genommen eine Funktion der Temperatur ist, und ruft damit sofort die Vermuthung wach, dass es bei dem hier in Frage stehenden Dehnungskoefficienten α ähnlich sein werde, was gegenüber der verbreiteten Auffassung, dass alle Materialien innerhalb gewisser Belastungsgrenzen einen unveränderlichen Elasticitätsmodul besitzen, ganz angezeigt erscheint. (Vergl. oben.)

Bei Stoffen, für welche α veränderlich ist, wie dies z. B. bei Gusseisen, Zinkguss, Leder u. s. w. der Fall, besteht demnach keine Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen, und kann deshalb auch keine Proportionalitätsgrenze vorhanden sein.

Behufs Gewinnung eines anschaulichen Bildes über das Gesetz, nach dem sich Dehnungen und Spannungen ändern, greifen wir zur bildlichen Darstellung.

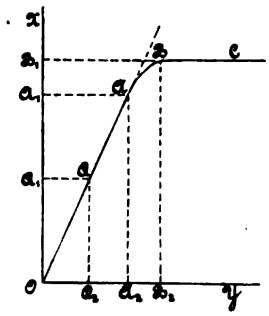


Fig. 3.

Auf der Abscissenachse, welche senkrecht angenommen sein soll, werden die Belastungen P aufgetragen, auf der wagrechten Ordinatenachse die durch diese Belastungen veranlassten Ausdehnungen λ. Um diejenigen Verhältnisse, welche hier zunächst klargestellt werden sollen, recht deutlich hervortreten zu lassen, werde ein Körper aus zähem Schmiedeisen zu Grunde gelegt und der Massstab für die Dehnungen verhältnissmässig gross gewählt. Wir erhalten die in Fig. 3 dargestellte Schaulinie $OQABC$. Für den beliebigen Punkt Q ist $\overline{OQ_1} = \overline{Q_2Q}$ die Belastung P und $\overline{OQ_2} = \overline{Q_1Q}$ die zugehörige Verlängerung λ.

Wie ersichtlich, verläuft die Linie bis zum Punkte A als Gerade, entsprechend dem Umstande, dass von der Belastung $P = O$ bis $P = \overline{OA_1}$ Proportionalität zwischen Belastungen (Spannungen) und Verlängerungen (Dehnungen) besteht. Bei höherer Belastung (über $P = \overline{OA_1}$ hinaus) beginnt die Verlängerung rascher zu wachsen: die Schaulinie löst sich tangential von der Geraden OQA nach der Ordinatenachse OY hin. Von B an verläuft sie (auf eine längere Strecke) fast parallel zu dieser, entsprechend einem ausserordentlich starken Wachsthum der Verlängerungen bei sehr geringer Steigung der Belastung: der Stab streckt sich.

Die Linie der Verlängerungen weist hiernach zwei ausgezeichnete Stellen A und B auf. Bei A geht die Proportionalität zwischen Belastungen und Verlängerungen zu Ende: die der Belastung $P = \overline{OA_1} = \overline{A_2A}$ entsprechende Spannung $\sigma = \frac{P}{f}$ ist demnach die Proportionalitätsgrenze. In B beginnt der Stab sich verhältnissmässig sehr stark zu strecken, gewissermassen zu fliessen: die

Spannung, welche der zum Punkte B gehörigen Belastung $P = \overline{OB_1} = \overline{B_2B}$ entspricht, wird deshalb als Streck- oder Fliessgrenze bezeichnet.

Wie bereits erwähnt, besitzen nicht alle Stoffe eine Proportionalitätsgrenze. Dasselbe ist auch hinsichtlich der Streck- oder Fliessgrenze zu bemerken. Vorhanden ist diese beispielsweise bei Schmiedeisen, weichem Stahl u. s. w.; sie fehlt z. B. bei den härteren Stahlsorten, bei Gusseisen, Holz u. s. f.

Die Fliessgrenze und die Proportionalitätsgrenze werden nicht selten als nahe bei einander liegend ermittelt, so z. B. bei weichem Stahl.

§ 8. Bruchbelastung. Festigkeit.

Wird die Belastung des Stabes fortgesetzt gesteigert, so findet schliesslich eine Trennung desselben, ein Zerreissen (Zerbrechen) statt.

Denken wir uns den in § 2 erwähnten Schmiedeisenstab in eine Materialprüfungsmaschine eingespannt, welche die Linie der

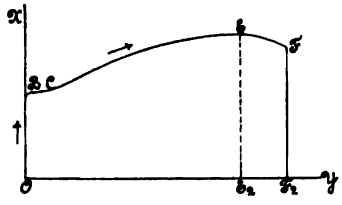


Fig. 4.

Fig. 5.

Verlängerungen selbstthätig aufzeichnet derart, dass die Belastungen die senkrechten Abscissen bilden, während die Verlängerungen λ die zugehörigen wagrechten Ordinaten liefern, und sodann die Belastung allmählich bis zum Zerreissen gesteigert, so erhalten wir die Schaulinie $OBCEF$ in Fig. 4. Hierbei sind die Verlängerungen im Verhältniss viel kleiner als in Fig. 3 gewählt. Infolge dieses kleinen Massstabes für die Werthe von λ löst sich die Dehnungskurve erst mit Beginn des Fliessens (Streckens) von der Achse OX (Achse der Belastungen). Sie läuft alsdann eine Strecke nahezu wagrecht und steigt hierauf langsam an bis zum Punkte E. Von dieser Verlängerung $\lambda = \overline{OE_2}$, welche die der Messung unterworfene

Stabstrecke unmittelbar bei der Belastung $P = \overline{E_2 E}$ ergiebt, wird angenommen, dass sie sich gleichmässig über die ganze Länge dieser Strecke vertheilt.

Nachdem diese Verlängerung OE_2 eingetreten ist, beginnt der Stab an einer Stelle sich einzuschnüren, also seinen Querschnitt zu vermindern, Fig. 5. Die Belastung P, welche von jetzt an zu weiterer Verlängerung erforderlich ist, nimmt ab, bis sich schliesslich der Stab bei $\lambda = \overline{OF_2}$ trennt[1]). Die Belastung im Augenblicke des Zerreissens ist $\overline{F_2 F} < \overline{E_2 E}$.

Die grösste zur Aufhebung des Zusammenhanges des Stabes erforderlich gewesene Kraft $\overline{E_2 E} = P_{max}$ wird als Bruchbelastung bezeichnet[2]). Die Spannung, welche dieser zum Zerreissen nöthigen Belastung entspricht, heisst Zugfestigkeit. Dieselbe ist hiernach

$$K_z = \frac{\text{Bruchbelastung}}{\text{Stabquerschnitt}}.$$

Hierbei erhebt sich die schon zu Gleichung 1 berührte Frage, mit welchem Querschnitt die Bruchbelastung zu theilen ist: Soll der ursprüngliche Querschnitt des Stabes, oder soll derjenige Querschnitt gewählt werden, den der Stab in dem Augenblicke besass, in welchem die Bruchbelastung wirkte? Streng genommen wäre der letztere Querschnitt in die Rechnung einzuführen, da der Quotient durch gleichzeitig vorhandene Grössen gebildet werden sollte. Dieser Querschnitt ist jedoch schwer zu ermitteln. Thatsächlich benutzt man den ersteren Querschnitt als Nenner und erhält in

$$K_z = \frac{P_{max}}{f} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

[1]) Es ist noch nachzuweisen, ob der Grösstwerth der Belastung des Stabes genau mit dem Beginn der Einschnürung zusammenfällt. Für die Nothwendigkeit eines solchen Nachweises spricht die Beobachtung, dass zuweilen bei zähem Material, wie z. B. weichem Stahl, Bronce, die Erscheinung mehr oder minder grosser Einschnürung an mehreren Stellen des Stabes nach einander auftritt; es bilden sich gewissermassen Knoten, bis schliesslich der Bruch an der zuletzt und am stärksten eingeschnürten Stelle erfolgt.

[2]) Liegt Veranlassung vor, diese Belastung von derjenigen im Augenblicke des Bruches, d. h. von $P = \overline{F_2 F}$ zu unterscheiden, so muss das ausdrücklich hervorgehoben werden. In der Regel wird nur $P_{max} = \overline{E_2 E}$ angeführt und als Bruchbelastung bezeichnet.

die Zugfestigkeit, bezogen auf den ursprünglichen Stabquerschnitt[1]). Da hiernach f zu gross eingeführt wird, so erscheint die durch Gleichung 6 bestimmte Zugfestigkeit zu klein, was im Sinne des Zweckes der anzustellenden Festigkeitsrechnungen zu liegen pflegt. Bei manchen Stoffen kann der Betrag dieses Zuklein bedeutend sein, bei anderen verschwindet er.

Die übliche Materialprüfungsmaschine lässt den Eintritt der höchsten Belastung dadurch erkennen, dass im darauf folgenden Augenblick der Waghebel sinkt.

Der grössere Theil der Konstruktionsstoffe liefert Schaulinien, welche Wachsthum der Spannungen bis zum Zerreissen aufweisen. Dann fallen die Punkte E und F (Fig. 4) zusammen.

§ 4. Gesammtdehnung. Dehnungsrest. Federung. Elasticität.

Wir nehmen einen aus gewalztem Kupfer hergestellten Rundstab und spannen denselben in eine Prüfungsmaschine. Die vorher stattgehabte Messung ergiebt

Durchmesser des Stabes	$d = 2{,}52$ cm
Querschnitt „ „	$f = \frac{\pi}{4} \cdot 2{,}52^2 = 5{,}00$ qcm
Länge der Strecke, für welche die Dehnung bestimmt werden soll	$l = 10{,}00$ cm.

Der Stab wird abwechselnd in Zeiträumen von 2 Minuten mit der Kraft P belastet und bis auf $P = 0$ entlastet. Hierbei ergeben sich aus den Beobachtungen die nachstehend zusammengestellten Zahlen.

[1]) Der Ermittlung der Zugfestigkeit den Werth $P_{max} = \overline{E_2 E}$ und den Querschnitt, welchen der Stab an der eingeschnürten (kontrahirten) Stelle (Fig. 5) besitzt, zu Grunde zu legen, muss als unzulässig bezeichnet werden, so lange Bruchbelastung und Bruchquerschnitt nicht gleichzeitig, sondern nach einander vorhanden sind.

Belastung in kg		Länge der Stabstrecke in cm	Zunahme der Länge in cm		
P	$\sigma=\frac{P}{f}$	$l+\lambda$	gesammte λ	bleibende λ'	sich wieder verlierende λ''
1	2	3	4	5	6
0	0	$l+0{,}00000$			
500	100	$l+0{,}00091$	0,00091		
				0,00001	0,00090
0	0	$l+0{,}00001$			
1000	200	$l+0{,}00182$	0,00182		
				0,00008	0,00174
0	0	$l+0{,}00008$			
1500	300	$l+0{,}00293$	0,00293		
				0,00025	0,00268
0	0	$l+0{,}00025$			
2000	400	$l+0{,}00434$	0,00434		
				0,00066	0,00368
0	0	$l+0{,}00066$			
3000	600	$l+0{,}00852$	0,00852		
				0,00210	0,00642
0	0	$l+0{,}00210$			

Wie ersichtlich, beträgt bei der Belastung $P=500$ kg die Zunahme der Länge 0,00091 cm; infolge der Entlastung verschwindet dieselbe bis auf 0,00001 cm, sodass also eine bleibende Längenänderung, ein Rest von dieser Grösse zu verzeichnen ist. Bei Belastung durch $P=1000$ kg ergiebt sich die gesammte Längenzunahme der ursprünglich 10 cm langen Strecke zu 0,00182 cm; durch die Entlastung verschwindet dieselbe bis auf 0,00008 cm u. s. f.

Wir haben hiernach dreierlei Längenänderungen zu unterscheiden:

a) Die gesammte Längenänderung λ, deren Werthe in der Spalte 4 enthalten sind, und die mit Gesammtausdehnung bezeichnet werden kann. Es ist dies diejenige Ausdehnung, welche wir in dem Früheren allein der Betrachtung unterworfen haben. Auf die Längeneinheit bezogen, d. h.

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

nannten wir sie kurz Dehnung (§ 2).

b) Die bleibende Längenänderung λ', deren Beträge sich in der Spalte 5 befinden, und die Dehnungsrest genannt werden soll.

Derselbe beträgt hier

bei der Spannung $\sigma = 100$ kg $\frac{1}{91}$ der Gesammtdehnung d. i. 1,1 %

„ „ „ $\sigma = 200$ „ $\frac{8}{182}$ „ „ „ 4,4 „

„ „ „ $\sigma = 300$ „ $\frac{25}{293}$ „ „ „ 8,5 „

„ „ „ $\sigma = 400$ „ $\frac{66}{434}$ „ „ „ 15,2 „

„ „ „ $\sigma = 600$ „ $\frac{210}{852}$ „ „ „ 24,6 „

Je grösser die Belastung des Stabes ist, um so bedeutender fällt der Dehnungsrest aus; bei entsprechend kleinen Belastungen verschwindet er.

c) Die sich wieder verlierende Längenänderung, über deren Grösse die Spalte 6 Auskunft giebt. Dieselbe ist Anfangs gleich der gesammten Längenänderung, bleibt jedoch um so mehr hinter dieser zurück, je stärker der Körper belastet wird. Wir erkennen, dass die Aenderungen, welche die Länge des Stabs infolge der Belastung erfahren hat, um so vollständiger verschwinden, je weniger gross sie waren.

Die jedem Körper innewohnende Eigenschaft, unter der Einwirkung äusserer Kräfte eine Aenderung seiner Gestalt zu erleiden und mit dem Aufhören dieser Einwirkung die erlittene Formänderung mehr oder minder vollständig wieder zu verlieren, wird als Elasticität bezeichnet. Die sich wieder verlierende Längenänderung ist die eigentlich elastische und werde deshalb, bezogen auf die Längeneinheit, Federung genannt.

Dem in § 3 gegebenen Vorgange folgend, stellen wir die für den Kupferstab erhaltenen Ergebnisse in Fig. 6 bildlich dar. Auf der senkrechten Abscissenachse OX werden die Spannungen σ (Spalte 2) und auf der wagrechten Ordinatenachse

α) die zugehörigen Gesammtausdehnungen λ (Spalte 4)
β) „ „ Dehnungsreste λ' (Spalte 5)
aufgetragen.

Die Ordinaten nach α liefern alsdann die Punkte für die Linie OAC, d. i. die Kurve der Gesammtausdehnungen, während die Ordinaten nach β in der Linie OED die Kurve der Dehnungsreste ergeben.

Die Betrachtung der Linie OAC zeigt, dass dieselbe bis zur Stelle A gerade verläuft, d. h. dass bis zur Spannung, welche dem Punkte A entspricht, Proportionalität zwischen Spannung und Dehnung besteht. Der Höhenabstand $\overline{A_1 A}$ des Punktes A über der Achse OY misst demnach die Proportionalitätsgrenze (§ 2) für den vorliegenden Kupferstab. Bei Spannungen über derselben wachsen die Dehnungen rascher. Dementsprechend muss der in § 2 als Mass der Dehnung aufgestellte Dehnungskoefficient anfangs unveränderlich sein und später zunehmen. Thatsächlich findet sich je mit $\sigma = 0$ als Ausgangspunkt[1])

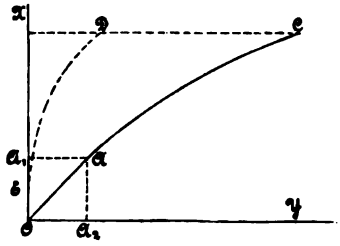


Fig. 6.

[1]) Je nach dem Zwecke der Darlegung oder dem Verwendungszwecke der zu ermittelnden Erfahrungsgrösse kann es angezeigt erscheinen, den Dehnungskoefficienten für die einzelnen Spannungsstufen zu bestimmen, wie dies seitens des Verfassers schon vor einer Reihe von Jahren geschehen ist. (Vergl. z. B. Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure 1887, S. 222 u. f.) Im vorliegenden Falle würde sich ergeben

für die Spannungsgrenzen 0/100 kg $\alpha = \frac{0{,}00091}{10 \cdot 100} = \sim \frac{1}{1100000}$

„ „ „ 100/200 „ $\alpha = \frac{0{,}00182 - 0{,}00091}{10\,(200 - 100)} = \sim \frac{1}{1100000}$

„ „ „ 200/300 „ $\alpha = \frac{0{,}00293 - 0{,}00182}{10\,(300 - 200)} = \sim \frac{1}{900000}$

u. s. f.

Hinsichtlich der Ausscheidung der Dehnungsreste bei Bestimmung von α vergleiche den Schluss von § 4 und § 5.

Statt der Einführung von Spannungsstufen kann man es unter Umständen auch vorziehen, eine allgemeine Beziehung aufzustellen, welche den Dehnungskoefficienten α als Funktion der Spannung σ oder der Dehnung ε giebt, wie der Verfasser an der bezeichneten Stelle ebenfalls hervorgehoben hat. Im Interesse

$$\text{bei } \sigma = 100 \text{ kg } \alpha = \frac{0{,}00091}{10.100} = 0{,}00000091 = \sim \frac{1}{1100000}$$

$$\text{„ } \sigma = 200 \text{ „ } \alpha = \frac{0{,}00182}{10.200} = 0{,}00000091 = \sim \frac{1}{1100000}$$

$$\text{„ } \sigma = 300 \text{ „ } \alpha = \frac{0{,}00293}{10.300} = 0{,}000000977 = \sim \frac{1}{1024000}$$

$$\text{„ } \sigma = 400 \text{ „ } \alpha = \frac{0{,}00434}{10.400} = 0{,}000001085 = \sim \frac{1}{922000}$$

$$\text{„ } \sigma = 600 \text{ „ } \alpha = \frac{0{,}00852}{10.600} = 0{,}00000142 = \sim \frac{1}{704000}$$

Die Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen ist demnach bei $\sigma = 200$ kg noch vorhanden, bei $\sigma = 300$ kg jedoch nicht mehr; die Proportionalitätsgrenze liegt also zwischen 200 und 300 kg. Die Darstellung in Fig. 6 ergiebt sie nur wenig oberhalb $\sigma = 200$ kg. In je kleineren Absätzen man bei den Versuchen die Belastungen wachsen lässt und je feinere Messwerkzeuge verwendet werden, um so genauer kann dieser Grenzwerth festgestellt werden.

Was die Linie OED der Dehnungsreste anbelangt, so zeigt sich, dass sie zu Anfang — etwa bis in die Gegend des Punktes E — vollständig mit der Achse OX zusammenfällt, sich jedoch bald von dieser loslöst und nach der Achse der Dehnungen OY hin krümmt. Das vorliegende Kupfermaterial in dem Zustande, in welchem es sich befindet, erweist sich demnach als vollständig elastisch nur für kleine Spannungen, etwa bis gegen den Punkt E hin.

Die Linie der Dehnungsreste kann insofern von praktischer Wichtigkeit erscheinen, als sie Auskunft darüber giebt, welche bleibende Dehnung bei einer bestimmten Inanspruchnahme des Körpers zu erwarten ist[1]). Zu diesem Zwecke lässt sich in ganz

---

der Einfachheit der Rechnung sieht z. Z. die Technik im Allgemeinen mit Recht von der Aufstellung solcher Funktionen ab (vergl. § 20, Ziff. 4).

[1]) In der Regel muss von den Konstruktionen gefordert werden, dass bleibende Formänderungen so gut wie nicht auftreten oder wenigstens eine gewisse Grenze nicht überschreiten. Dementsprechend kann man in der Linie der Dehnungsreste (d. i. in Fig. 6 die Kurve OED) einen Punkt, den wir Z nennen wollen, annehmen, bis zu welchem hin die bleibenden Dehnungen als verschwindend oder doch genügend klein erscheinen; man erhält dadurch in dem zugehörigen Höhenabstand einen Spannungsgrenzwerth, unterhalb dessen die bleiben-

gleicher Weise, wie dies in § 2 für die Gesammtdehnung geschehen ist, eine Masszahl für den Dehnungsrest feststellen.

Auf dem gleichen Wege kann eine Masszahl für die Federung gewonnen werden, wie dies vom Verfasser schon seit längerer Zeit geschehen ist (vergl. hierüber z. B. Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure 1887, S. 222 u. f.). Es wird dies namentlich dann nothwendig, wenn diejenige Elasticität in Frage kommt, welche bei rasch auf einander folgenden Spannungsänderungen vorhanden ist (Federn, Treibriemen, Treibseile u. s. w.).

§ 5. Einfluss der Zeit. Elastische Nachwirkung.

Wie in § 4 hervorgehoben, wohnt jedem Körper — allerdings in verschiedenem Grade — die Eigenschaft inne, unter der Einwirkung äusserer Kräfte eine Aenderung der Gestalt zu erfahren und mit dem Aufhören dieser Einwirkung die erlittene Formänderung mehr oder weniger vollständig wieder zu verlieren. Eine

---

den Dehnungen vernachlässigbar sind. Diese Spannung kann in Uebereinstimmung mit bisheriger Auffassung als Elasticitätsgrenze bezeichnet werden.

Wie klar ersichtlich, ist der Punkt Z nicht durch die Natur des Materials allein bestimmt. Diese setzt nur seinen geometrischen Ort — die Linie der Dehnungsreste — fest; seine Lage auf dieser Linie erscheint, sofern die Dehnungsreste nicht verschwindend klein sind, zu einem bedeutenden Theile von dem persönlichen Ermessen desjenigen abhängig, der über die höchstens noch für zulässig erachtete Grösse des Dehnungsrestes zu entscheiden hat. Dass hierbei auch der besondere Zweck des Gegenstandes, um den es sich handelt, einflussnehmend auftreten kann, ist selbstverständlich.

Die Vermengung der Elasticitätsgrenze mit der Proportionalitätsgrenze, indem man ausspricht: die Elasticitätsgrenze ist diejenige Spannung, bis zu welcher die Dehnungen nach dem Entlasten vollständig oder doch nahezu ganz wieder verschwinden, und ferner, dass innerhalb der Elasticitätsgrenze Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen bestehe, erscheint mindestens im Allgemeinen unzulässig. Sie läuft in nicht wenigen Fällen darauf hinaus, dass durch das mehr oder minder willkürliche Festlegen des oben genannten Punktes Z auf der Linie der Dehnungsreste (OED, Fig. 6), gleichzeitig der Linie der Gesammtdehnungen (OAC, Fig. 6), vorgeschrieben wird, auf welche Strecke sie mit einer Geraden zusammenzufallen hat, oder dass dem Punkte Z der Dehnungsrest-Linie dieselbe Ordinate aufgezwungen wird, welche der Punkt A der Kurve der Gesammtdehnungen besitzt. Dazu kommt, dass die Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen überhaupt nicht bei allen Stoffen vorhanden ist, so z. B. nicht bei dem für den Maschinenbau so wichtigen Gusseisen.

klar zu Tage liegende Folge dieser Eigenschaft ist es, dass der Körper bei plötzlicher Einwirkung der Kräfte oder bei plötzlicher Entlastung in Schwingungen versetzt wird. Aus diesem Zustande geht er, indem die Schwingungen kleiner und kleiner werden, nach mehr oder minder langer Zeit in den Ruhestand über.

Aber auch dann, wenn die Inanspruchnahme oder die Entlastung des Körpers allmählich erfolgt, wenn also derartige Schwingungen nicht beobachtet werden, erweist sich die Formänderung im Allgemeinen nicht unabhängig von der Zeit. Die durch eine bestimmte Belastung erzeugbare Formänderung bedarf zu ihrer Ausbildung einer gewissen, zuweilen kurzen, unter Umständen aber auch sehr langen Zeit. Beispielsweise wird ein Stab aus hartem Werkzeugstahl schon unmittelbar nach allmählich erfolgter Belastung die überhaupt durch diese erreichbare Dehnung aufweisen, während ein belasteter Lederriemen nach Monaten, ja selbst nach Jahren noch Längenzunahmen, wenn auch immer kleiner werdende, zeigt. In Fällen letzterer Art führt die Zeit asymptotisch zum Endzustand.

Ganz das Entsprechende gilt hinsichtlich der Entlastung: der allmählich entlastete Stab nähert sich dem ursprünglichen Zustande — je nach der Art des Materials — mit verschiedener Geschwindigkeit, um so langsamer, je grösser die erlittene Formänderung war und je länger sie angedauert hatte.

Diese Erscheinung der allmählichen Ausbildung und der allmählichen Rückbildung der Formänderungen wird elastische Nachwirkung genannt. Sie beeinträchtigt die Genauigkeit der Beobachtungen bei Versuchen zur Bestimmung der Formänderungen mehr oder minder. Namentlich bei wechselnden Belastungen kann dieselbe zu eigenthümlichen Abweichungen führen, entsprechend einem gleichzeitigen, beiderseits mit veränderlicher Geschwindigkeit erfolgenden Verlaufe entgegengesetzter Aenderungen.

Dieser Einfluss der Zeit auf die Formänderungen, wie auch auf die Festigkeit[1]) des Stoffes macht es nothwendig, dass im Allgemeinen den Ergebnissen von Versuchen auf diesem Gebiete die erforderlichen Angaben über die Zeit beigefügt werden.

---

[1]) Beispielsweise werden Stäbe aus Schmiedeisen, Lederriemen u. s. w., sehr rasch zerrissen, einen grösseren Werth für die durch Gleichung 6 bestimmte Festigkeit liefern, als wenn das Zerreissen langsam erfolgt. Dagegen pflegen im letz-

I. Zug.

Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äusseren Kräfte ergeben für jeden Querschnitt desselben eine Kraft, deren Richtungslinie in die Stabachse fällt, und welche diese zu verlängern strebt.

§ 6. Gleichungen der Zugelasticität und Zugfestigkeit.

1. Es bedeute für den **prismatischen** Stab

P die ziehende Kraft,

f die Grösse des ursprünglichen Stabquerschnittes,

l die ursprüngliche Länge des Stabes,

λ die Verlängerung, welche der Stab durch die Einwirkung der Kraft P erfährt,

$\varepsilon = \frac{\lambda}{l}$ die Dehnung (§ 2),

α den Dehnungskoefficienten (§ 2),

σ die Spannung, welche durch die Belastung P hervorgerufen wird, und die mit der Dehnung ε verknüpft ist, bezogen auf den ursprünglichen Querschnitt (§ 1),

k_z die zulässige Anstrengung des Materials gegenüber Zugbeanspruchung.

Dann ist nach Gl. 1

$$P = \sigma f. \quad \ldots \quad 7)$$

$$P \leq k_z f, \quad \ldots \quad 8)$$

Unmittelbar aus dem Begriff des Dehnungskoefficienten folgt

$$\lambda = \alpha l \sigma = \alpha l \frac{P}{f}. \quad \ldots \quad 9)$$

---

teren Falle Dehnung und Querzusammenziehung grösser auszufallen: die zur Ausbildung der Formänderungen gelassene Zeit ist eben bedeutender. (Vergl. auch § 10.)

2. Diese zunächst nur für prismatische Stäbe entwickelten Beziehungen werden dann auch auf gerade stabförmige Körper von **veränderlichem Querschnitte** übertragen.

Es bezeichne, Fig. 7,

P die Kraft, welche den Körper auf Zug in Anspruch nimmt,

f die Grösse des beliebigen, um x von der einen Stirnfläche abstehenden Querschnittes,

f_0 den kleinsten Stabquerschnitt,

l die Länge des Stabes vor der Dehnung,

λ die Zunahme der Stablänge in Folge der Einwirkung der Kraft P,

ε die Dehnung im Querschnitt f,

$\sigma = \frac{P}{f}$ die Spannung im Querschnitt f,

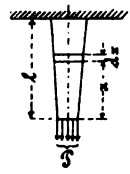


Fig. 7.

α den Dehnungskoefficienten,

k_z die zulässige Anstrengung des Materials gegenüber Zugbeanspruchung.

Die Dehnung ε ist hier von Querschnitt zu Querschnitt als veränderlich aufzufassen, weshalb in Bezug auf die Grössen l und λ der Bestimmungsgleichung 2 die Vorschrift getroffen werden muss, dass die Stablänge unendlich klein, also im vorliegenden Falle dx ist. Wird die Längenänderung, welche dx erfährt, mit Δdx bezeichnet, so folgt

$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx}.$$

Dann gelten ausser der Gl. 7 die folgenden Beziehungen:

$$P \leqq k_z f_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 10)$$

$$\lambda = \int_0^l \varepsilon \, dx = P \int_0^l \alpha \frac{dx}{f}. \quad \ldots \ldots \quad 11)$$

Ist α unveränderlich, was bei Spannungen innerhalb der Proportionalitätsgrenze zutrifft, falls dem in Frage stehenden Material eine solche überhaupt eigenthümlich (§ 2), so darf α vor das Integralzeichen gesetzt werden.

Die Voraussetzungen, welche den vorstehenden Beziehungen 7 bis 11 zu Grunde liegen, sind in manchen Fällen der Verwendung

sehr unvollkommen erfüllt. Mit Rücksicht auf diesen Umstand seien sie kurz zusammengestellt.

1. Die äusseren Kräfte ergeben für jeden Querschnitt nur eine in die Stabachse fallende Zugkraft.
2. Auf die Mantelfläche des Stabes wirken Kräfte nicht.
3. Der Einfluss des Eigengewichtes des Stabes kommt nicht in Betracht.
4. Die Dehnungen und die Spannungen sind in allen Punkten eines beliebigen Stabquerschnittes gleich gross und senkrecht zu letzterem gerichtet. (Gleichmässige Vertheilung der Zugkraft über den Querschnitt.)
5. Die Form des Querschnittes ist gleichgiltig.

Soll das eigene Gewicht G des Körpers berücksichtigt werden, so ergiebt sich für den obersten Querschnitt von der Grösse f_1 in Fig. 7

$$\sigma = \frac{P+G}{f_1}, \qquad k_z \geq \frac{P+G}{f_1}.$$

Von dem Querschnitte f (im Abstande x) bis zu dem um dx davon entfernten Querschnitt ändert sich die Gesammtzugkraft $f\sigma$ um $\gamma f\,dx$, sofern γ das specifische Gewicht des Stabmaterials bedeutet. Hieraus folgt

$$d(f\sigma) = \gamma f\,dx.$$

Wird nun verlangt, die Stabquerschnitte derartig nach oben zunehmen zu lassen, dass σ für alle Querschnitte den gleichen Werth k_z hat, so ergiebt sich

$$k_z\,df = \gamma f\,dx$$

und hieraus

$$ln f = \frac{\gamma x}{k_z} + C_1.$$

Für $x = 0$ muss sein $f = P : k_z$, d. h.

$$C_1 = ln \frac{P}{k_z}.$$

Hiermit wird schliesslich in

$$f = \frac{P}{k_z} e^{\frac{\gamma x}{k_z}}$$

das Gesetz erhalten, nach dem der gezogene Stab als Körper gleichen Widerstandes zu formen wäre.

§ 7. Mass der Zusammenziehung. Kräfte senkrecht zur Stabachse. Gehinderte Zusammenziehung.

Wie wir in § 1, b sahen, findet mit der Ausdehnung des nur in der Richtung der Achse gezogenen Stabes Fig. 2 gleichzeitig eine Zusammenziehung senkrecht zur Achse statt. Beträgt die durch Gl. 2 bestimmte Dehnung ε, so werden die nach jeder zur Achse senkrechten Richtung eintretenden Zusammenziehungen, bezogen auf die Längeneinheit, d. s. die verhältnissmässigen Zusammenziehungen $\left(\text{im Falle § 1, b gleich } \frac{\delta}{d}\right)$ als gleich gross betrachtet und durch

$$\varepsilon_q = \frac{\varepsilon}{m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

gemessen. Die Grösse m pflegt als eine zwischen 3 und 4 liegende Konstante aufgefasst zu werden, sodass hiernach die verhältnissmässige Zusammenziehung $^1/_4$ bis $^1/_3$ der Dehnung beträgt.

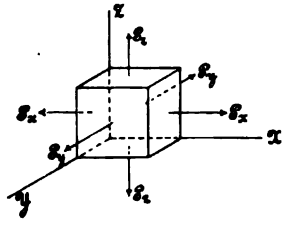


Fig. 8.

Der in Fig. 8 dargestellte Würfel, bestehend aus durchaus gleichartigem (isotropem) und Proportionalitätsgrenze (§ 2) besitzendem Material, werde innerhalb der letzteren zunächst nur in Richtung der x-Achse auf Zug (durch P_x, P_x) in Anspruch genommen. Die in dieser Richtung eintretende Dehnung sei durch ε_x und die hiermit verknüpfte Spannung durch $\sigma_x = \frac{\varepsilon_x}{\alpha}$ bezeichnet. Nach Massgabe des Erörterten beträgt dann:

in Richtung der y-Achse

die verhältnissmässige Zusammenziehung $\frac{\varepsilon_x}{m}$, die Spannung 0,

in Richtung der z-Achse

die verhältnissmässige Zusammenziehung $\frac{\varepsilon_x}{m}$, die Spannung 0.

Wird der Würfel nur in Richtung der y-Achse (von P_y, P_y) gezogen und werden die hierdurch in dieser Richtung veranlasste Dehnung und Spannung ε_y, beziehungsweise $\sigma_y = \frac{\varepsilon_y}{\alpha}$ genannt, so findet sich:

in Richtung der x-Achse

die verhältnissmässige Zusammenziehung $\frac{\varepsilon_y}{m}$, die Spannung 0,

in Richtung der z-Achse

die verhältnissmässige Zusammenziehung $\frac{\varepsilon_y}{m}$, die Spannung 0.

Wird schliesslich der Würfel nur in Richtung der z-Achse auf Zug in Anspruch genommen (durch P_z, P_z) und die hiermit in dieser Richtung verknüpfte Dehnung durch ε_z, die Spannung durch $\sigma_z = \frac{\varepsilon_z}{\alpha}$ gemessen, so müsste betragen:

in Richtung der x-Achse

die verhältnissmässige Zusammenziehung $\frac{\varepsilon_z}{m}$, die Spannung 0,

in Richtung der y-Achse

die verhältnissmässige Zusammenziehung $\frac{\varepsilon_z}{m}$, die Spannung 0.

Wirken die Kräfte $P_x P_x$ $P_y P_y$ $P_z P_z$ gleichzeitig, so beträgt die resultirende Dehnung

$$\left.\begin{array}{lll} \text{in Richtung der } x\text{-Achse} & \varepsilon_1 = \varepsilon_x - \frac{\varepsilon_y + \varepsilon_z}{m} \\ \text{„ „ „ } y\text{- „} & \varepsilon_2 = \varepsilon_y - \frac{\varepsilon_z + \varepsilon_x}{m} \\ \text{„ „ „ } z\text{- „} & \varepsilon_3 = \varepsilon_z - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{m} \end{array}\right\}, \quad 13)$$

woraus unter Berücksichtigung, dass

$$\varepsilon_x = \alpha\,\sigma_x \qquad \varepsilon_y = \alpha\,\sigma_y \qquad \varepsilon_z = \alpha\,\sigma_z \quad . \quad . \quad 14)^1)$$

folgt

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \alpha\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y+\sigma_z}{m}\right) \text{ oder } \frac{\varepsilon_1}{\alpha} = \sigma_x - \frac{\sigma_y+\sigma_z}{m} \\ \varepsilon_2 &= \alpha\left(\sigma_y - \frac{\sigma_z+\sigma_x}{m}\right) \quad , \quad \frac{\varepsilon_2}{\alpha} = \sigma_y - \frac{\sigma_z+\sigma_x}{m} \\ \varepsilon_3 &= \alpha\left(\sigma_z - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{m}\right) \quad , \quad \frac{\varepsilon_3}{\alpha} = \sigma_z - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{m} \end{aligned}\right\} \quad 15)$$

Die Beziehungen 15 lehren, dass die Proportionalität, welche bei dem ausschliesslich in der Richtung seiner Achse gezogenen Stabe nach Massgabe der Gleichungen 4 und 14 zwischen Dehnungen und Spannungen — unter der Voraussetzung, dass α konstant — vorhanden ist, zu bestehen aufhört, sobald auch Kräfte senkrecht zur Stabachse den Körper ergreifen. Die resultirende Dehnung wird durch solche Zugkräfte vermindert.

In Anbetracht, dass derartige Kräfte eine mehr oder minder grosse Hinderung der Zusammenziehung zur Folge haben, erkennen wir, dass Erschwerung oder theilweise Hinderung der Zusammenziehung (Kontraktion) des Stabes (senkrecht zu dessen Achse) die Dehnung (in Richtung der Achse) verringert und damit im Allgemeinen, wie Versuche nachweisen (§ 9, Ziff. 1), auch die Festigkeit erhöht[2]).

---

[1]) Besitzt das Material keine Proportionalitätsgrenze, so wird der Dehnungskoefficient α nicht konstant, sondern eine Funktion von σ oder ε sein. Es würde dann heissen müssen, etwa:

$$\varepsilon_x = \alpha_1\,\sigma_x, \qquad \varepsilon_y = \alpha_2\,\sigma_y, \qquad \varepsilon_z = \alpha_3\,\sigma_z.$$

Hierin würden je nach der Verschiedenheit der Spannungen σ_x σ_y σ_z die Dehnungskoefficienten α_1 α_2 α_3 verschieden grosse Werthe aufweisen.

[2]) Ueber die erste dahingehende Darlegung des Verfassers s. Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure 1880, S. 285 u. f.

§ 8. Zugproben.

Den Zugproben werden die Metalle, auf welche sich das Nachstehende zunächst nur bezieht, in Form von Rundstäben

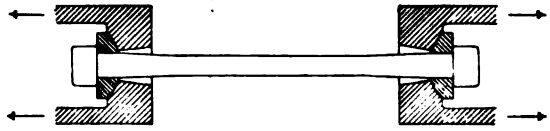


Fig. 9.

oder in Form von Flachstäben

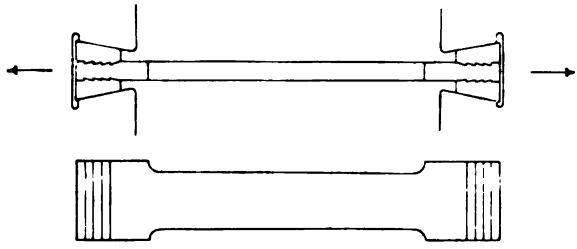


Fig. 10.

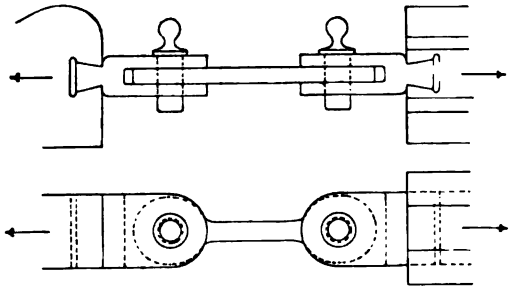


Fig. 11.

unterworfen.

Die zum Einspannen in die Prüfungsmaschine benutzten Vorrichtungen müssen so beschaffen sein, dass die Zugkraft möglichst gleichförmig über die Querschnitte des der Messung unterworfenen mittleren Stückes (von der Länge l) des Probekörpers vertheilt wird. Dieser Bedingung lässt sich bei Rundstäben durch die Kugellagerung (Fig. 9), bei Flachstäben durch Befestigung mittelst

Loch und Bolzen (Fig. 11), oder durch Einlegen der mit gefrästen Nuthen versehenen Enden in Gebisskeile (Fig. 10) entsprechen. Die Herstellung der Flachstäbe fordert jedoch unter allen Umständen besondere Sorgfalt, wenn der aufgestellten Bedingung genügt sein soll.

Eine zutreffende Vergleichung der Ergebnisse mehrerer Versuche setzt voraus, dass diese unter den gleichen Verhältnissen durchgeführt worden sind. Wie aus dem in (§ 9) und (§ 10) Erörterten hervorgeht, gehört hierzu, dass die Stäbe gleiche oder wenigstens geometrisch ähnliche Querschnitte besitzen und im Allgemeinen gleich lang den Versuchen unterworfen werden.

Die der Messung unterzogene Strecke l, die Messlänge, pflegt zu 200 mm angenommen und das mittlere Stück um wenigstens 20 mm länger, d. h. $l + 20$ mm prismatisch gehalten zu werden.

Wird für den Rundstab von 20 mm Durchmesser — wie üblich — $l = 200$ mm zu Grunde gelegt, dann fordert die in § 9, Ziff. 3 (S. 36) ausgesprochene Bedingung für einen Rundstab von d mm Durchmesser als Messlänge

$$l = 200 \frac{d}{20} = 10\, d$$

und für einen Flachstab von f qmm Querschnitt die Messlänge

$$l = 200 \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{\frac{\pi}{4} \cdot 20^2}} = 11{,}3\sqrt{f}.$$

Bei der grossen Masse der Zugproben pflegt nur festgestellt zu werden:

a) die Bruchbelastung P_{max} (§ 3) und damit die Zugfestigkeit K_z (§ 3),
b) der Querschnitt f_b an der Bruchstelle (an der Stelle der Einschnürung, Fig. 5),
c) die Länge l_b, welche das ursprünglich l lange Stabstück nach dem Zerreissen besitzt.

Die Beobachtung nach a liefert in

$$K_z = \frac{P_{max}}{f} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

die Zugfestigkeit, bezogen auf den ursprünglichen Stabquerschnitt (§ 3).

Die Ermittlung nach b ergiebt in

$$\psi = 100 \frac{f - f_b}{f} \quad \ldots \ldots \quad 16)$$

die Verminderung des Querschnittes an der Bruchstelle in Hunderttheilen des ursprünglichen Querschnittes, die Bruchzusammenziehung oder Bruchkontraktion, oder kurz die Zusammenziehung, Einschnürung oder Kontraktion genannt. Klarer erscheint die Bezeichnung Querschnittsverminderung des zerrissenen Stabes.

Die Feststellung nach c liefert in

$$\varphi = 100 \frac{l_b - l}{l} \quad \ldots \ldots \quad 17)$$

die Verlängerung der der Messung unterworfenen Stabstrecke in Hunderttheilen der ursprünglichen Länge, die Dehnung des zerrissenen Stabes, die Bruchdehnung oder kurz die Dehnung genannt.

Wie wir in § 3 sahen, dehnt sich zunächst die ganze Stabstrecke mehr oder minder gleichmässig bis zum Eintritt der Bruchbelastung, dann folgt die Einschnürung des Stabes — falls eine solche überhaupt eintritt —, die mit einer verhältnissmässig grossen Ausdehnung an dieser besonderen Stelle verknüpft ist. Es setzt sich hiernach die durch Gl. 17 gemessene Dehnung im Allgemeinen zusammen: aus der Dehnung der ganzen Strecke bis zum Eintritt der Bruchbelastung und aus der Dehnung an der Einschnürungsstelle, vermindert um die Verkürzung, welche aus Anlass der mit dem Zerreissen erfolgten Entlastung des Stabes eintritt. Wird zunächst angenommen, der Bruch erfolge in der Mitte der Strecke l, so ergiebt die Gl. 17 bei vorhandener Einschnürung einen um so grösseren Werth für φ, je kleiner l ist. Im Allgemeinen gehört hiernach zur Angabe von φ auch die Grösse von l. Geht der Bruch ausserhalb der Mitte vor sich — was in der Regel der Fall —, so wird φ um so kleiner ausfallen, je mehr die Bruchstelle an das Ende von l rückt[1]).

[1]) Mit Rücksicht auf diesen Uebelstand und sonstige Unsicherheiten hat man in Bezug auf die Messung von l_b folgende Vorschriften vereinbart:

Die Dehnung ist auf zwei entgegengesetzten Seiten des Rundstabes so zu messen, dass beiderseits auf jedem der Bruchstücke von dem Ende der Mess-

Ein solches Mass kann streng genommen nicht als richtiges bezeichnet werden. Trotzdem ist es heute noch üblich, die Dehnung in dieser Weise zu messen und die erhaltene Grösse bei der

---

länge bis zur Bruchstelle gemessen und aus den zwei Summen der zusammengehörigen Stücke das Mittel genommen wird.

Erfolgt der Bruch ausserhalb des mittleren Dritttheils der Messlänge, so ist der Versuch auszuschliessen oder das folgende Verfahren anzuwenden.

Die Messlänge l ist von 10 zu 10 mm einzutheilen, Fig. 12 (s. die unterhalb stehenden Zahlen).

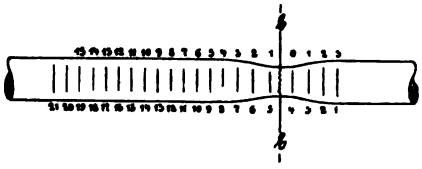


Fig. 12.

Es erfolge der Bruch im Querschnitt $b\,b$. Von der Bruchstelle ausgehend, werden zunächst die Theilstriche nach links und rechts hin neu bezeichnet, so, wie über der Figur eingeschrieben ist. Sodann wird links die Länge zwischen den Theilstrichen 1 bis 10 gemessen und zu ihr $\overline{b0} + \overline{b1}$ addirt; hierauf rechts die Entfernung der Theilstriche 03 bestimmt und zu ihr die von links zu entnehmende Strecke 3 bis 10 hinzugefügt. Die Summe der so erhaltenen beiden Grössen ergiebt l_b. Hiernach ist

$l_b =$ [Länge zwischen den Theilstrichen 1 bis 10 (links vom Bruch) $+$ $(\overline{b0} + \overline{b1})$]
$+$ [Länge zwischen den Theilstrichen 0 bis 3 (rechts vom Bruch) $+$
Länge zwischen den Theilstrichen 3 bis 10 (links vom Bruch)].

Würde im vorliegenden Falle die Länge l nicht 200 mm, sondern 100 mm betragen, so würde sein

$l_b =$ [Länge zwischen den Theilstrichen 1 bis 5 (links vom Bruch) $+$ $(\overline{b0} + \overline{b1})$]
$+$ [Länge zwischen den Theilstrichen 0 bis 3 (rechts vom Bruch) $+$
Länge zwischen den Theilstrichen 3 bis 5 (links vom Bruch)].

Auf diese Weise hat man unter der Voraussetzung, dass die Längenänderungen zu beiden Seiten des Bruches einen symmetrischen Verlauf haben, den Stab nahezu so ausgemessen, als wenn der Bruch in der Mitte erfolgt wäre.

Im Falle sich der Stab an mehr als einer Stelle besonders stark zusammengezogen hat (vergl. die erste Fussbemerkung S. 8), so verliert allerdings das angegebene Verfahren an Werth.

Die Eintheilung der Strecke l, wie auch die Bestimmung von l_b nach dem Bruche sind immer auf zwei entgegengesetzten Seiten des Stabes vorzunehmen.

Bei Flachstäben wird empfohlen, die Dehnung sowohl auf beiden Schmalseiten, als auch auf einer Breitseite zu messen und das Mittel aus den beiden ersteren Messungen, sowie das Ergebniss der letzteren getrennt anzugeben.

(Vergl. hiermit das S. 38 oben unter f) Gesagte.)

Um die Veränderlichkeit der Dehnung, überhaupt die Formänderung zu zeigen, welche ein der Zugprobe unterworfener Flachstab aufweist, wurde die in

Beurtheilung der Güte des Materials zu Grunde zu legen[2]). Richtiger würde es sein, wie auch von Hartig vorgeschlagen wurde, diejenige Dehnung zu bestimmen, welche im Augenblicke des Auftretens des grössten Zugwiderstandes oder unmittelbar vor Beginn der Einschnürung vorhanden ist. Es wäre dies die Grösse OE_2 in Fig. 4. Da es mit den üblichen Prüfungsmaschinen schwer hält oder wenigstens umständlich ist, die Dehnung in dem bezeichneten Augenblick genau festzustellen, so fehlt zunächst noch alle

---

Fig. 13 (Taf. I) wiedergegebene Zusammenstellung gefertigt. Auf zwei nach Fig. 10 hergestellten Flachstäben aus Flussstahl von genau 60 mm Breite und 12 mm Stärke waren durch Längs- und Querlinien im Abstande von 10 mm Quadrate von 10 mm Seitenlänge gezeichnet worden. Alsdann wurde der eine Stab der Zugprobe unterworfen. Derselbe erfuhr hierbei die aus Fig. 13 deutlich ersichtliche Formänderung. Der Riss erfolgte an einer Stelle, welche durch eine der eingerissenen Querlinien etwas verletzt worden war.

Es betrug

die Bruchbelastung P_{max} . . . . . 37460 kg,
der ursprüngliche Querschnitt f . . . . . $6 \cdot 1{,}2 = 7{,}2$ qcm,
der Bruchquerschnitt f_b . . . . . $4{,}82 \cdot 0{,}94 = 4{,}53$ qcm,
die Dehnung auf 100 mm . . . . . 27,5 mm.

Demnach

die Zugfestigkeit K_z . . . . . $\frac{37460}{7{,}2} = 5203$ kg,

die Querschnittsverminderung ψ . . $100\,\frac{7{,}2-4{,}53}{7{,}2} = 37\,\%$,

die Dehnung φ . . . . . $100\,\frac{127{,}5-100}{100} = 27{,}5\,\%$.

Fig. 14 (Taf. I) zeigt einen Schweisseisen- und Fig. 15 einen Flusseisen-Rundstab nach dem Zerreissen. Die Verschiedenheit der Oberfläche der Stäbe kennzeichnet die beiden Materialien.

[2]) Die Beschaffenheit des Materials wird im Allgemeinen beurtheilt nach den für K_z, φ und ψ erhaltenen Werthen. In neuerer Zeit neigt man dazu, dem Inhalt der Fläche $OBCEFF_2O$, Fig. 4, oder richtiger demjenigen der Fläche $OBCEE_2O$ besonderes Gewicht hierbei einzuräumen. Die zuerst genannte Fläche stellt die mechanische Arbeit dar, welche die Zerreissung des Stabes fordert, während die zweite Fläche nur diejenige Arbeit misst, welche das ganze Stabstück bis zum Beginn der Einschnürung zu seiner Ausdehnung verlangt (vergl. die Fussbemerkungen zu § 3). Von da an bis zum Bruche wird mechanische Arbeit vorzugsweise nur von demjenigen Material verbraucht, welches an der sich zusammenziehenden Stelle vorhanden ist. Die Fläche $OBCEFF_2O$ kann als Arbeitsdiagramm bis zum Bruche, die Fläche $OBCEE_2O$ als Arbeitsdiagramm bis zur Einschnürung oder bis zum Eintritt der Bruchbelastung bezeichnet werden.

Fig. 13.

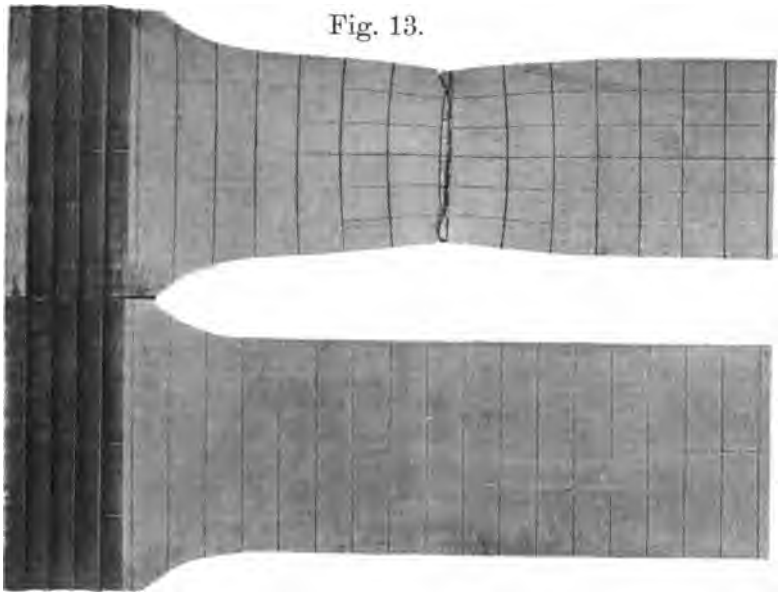


Fig. 14.

Fig. 15.

Aussicht, dass diese Grösse als Mass der Dehnung allgemein angenommen werden wird. Fälle, wie sie nicht selten zu verzeichnen sind, dass der gezogene Stab sich an einer Stelle einschnürt, hierauf eine noch weiter wachsende Belastung verträgt, dann an einer zweiten Stelle eine Einschnürung erfährt und in dieser bei sinkender Belastung zerreisst, würden verlangen, dass das Dehnungsmass unmittelbar vor Beginn der ersten Einschnürung genommen wird.

Ueber die Abhängigkeit der Dehnung φ von den Abmessungen, insbesondere vom Durchmesser bei gleichen Werthen von l u. s. w. s. § 9.

Bei umfassenden Versuchen tritt zu den oben unter a bis c angegebenen Ermittlungen noch die Bestimmung

d) des Dehnungskoefficienten und der Proportionalitätsgrenze (§ 2),
e) der Fliessgrenze (§ 2),
f) der Dehnungsreste (§ 4)

und unter Umständen die Feststellung noch anderer Grössen.

§ 9. Einfluss der Form des Stabes.

Die Aufstellungen in § 6 enthalten nur die Grösse f des Stabquerschnittes; die Form desselben wäre hiernach vollständig gleichgiltig. Thatsächlich ist sie es jedoch nicht, wenn auch ihr Einfluss nicht bedeutend erscheint. Sein Vorhandensein erhellt, abgesehen von Versuchsergebnissen, schon aus folgender Erwägung.

Den Entwicklungen der üblichen Gleichungen für die Zugelasticität und Zugfestigkeit, wie sie in § 6 und § 8 aufgeführt sind, liegt zunächst die Voraussetzung zu Grunde, dass die Dehnungen und Spannungen in allen Punkten des Stabquerschnittes gleich gross sind, dass sich alle Fasern, aus denen der Stab bestehend gedacht werden kann, ganz gleich verhalten und nicht gegenseitig auf einander einwirken. Es ändert an jenen Gleichungen nichts, ob eine Kraft P — gleichmässig vertheilt — getragen wird von einem Stab, dessen Querschnitt 10 qcm beträgt, oder von 1000 Stäben von je 1 qmm Querschnitt. In dem einen Falle ist $f = 10$ qcm, in dem anderen $f = 1000 . 0{,}01 = 10$ qcm, d. h. in beiden Fällen gleich. In Wirklichkeit aber — immer gleichmässige Vertheilung der Last und gleiches Material vorausgesetzt —

werden sich die 1000 Metallfäden von je 1 qmm Querschnitt unabhängig von einander (senkrecht zur Achse) zusammenziehen können; sie werden, wenn sie sich vorher gerade berührten, die Berührung in Folge der mit der Dehnung (Belastung) verknüpften Zusammenziehung aufgeben. Die einzelnen Fasern des Stabes von 10 qcm Querschnitt jedoch besitzen eine solche Unabhängigkeit nicht; sie wirken senkrecht zur Achse auf einander ein. Das Ergebniss dieser Einwirkung aber muss ein verschiedenes sein, je nach der Form des Querschnitts, es wird ein anderes sein bei einem kreisförmigen, als bei einem langgestreckt rechteckigen oder einem I-förmigen, es wird ein anderes sein bei einem dünnwandigen Hohlcylinder, als bei einem Vollcylinder u. s. w. Dass aber die bezeichnete seitliche Einwirkung Dehnung und Festigkeit beeinflusst, ergiebt sich aus den Betrachtungen, welche in § 7 angestellt wurden.

Derselbe Gedankengang führt zu dem Ergebniss, dass auch die Grösse der Abmessungen bei einer und derselben Querschnittsform — streng genommen — nicht ganz gleichgiltig sein wird.

Versuchsergebnisse.

1. Einfluss der Stabform, welche der Querschnittsverminderung (Zusammenziehung) hinderlich ist.

Kirkaldy stellte Zerreissungsversuche mit Rundeisenstäben nach Fig. 16, 17 und 18 an. Die Stäbe Fig. 17 sind entstanden aus Cylindern Fig. 16 je durch Eindrehen einer schmalen Nuthe auf den Durchmesser d, die Stäbe Fig. 18 aus solchen Fig. 16 durch Abdrehen auf den Durchmesser d.

Fig. 16.

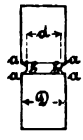


Fig. 17.

Fig. 18.

Die Ergebnisse dieser Versuche sind umstehend zusammengestellt.

Sie zeigen die für den ersten Augenblick schlagende Eigenthümlichkeit, dass die Festigkeit bei den nach Fig. 17 eingedrehten Stäben weit grösser ist, als bei den nicht eingedrehten. Versuche,

welche in Woolwich mit Stahlstangen (von $1^3/_{16}$" engl. Stärke und mit einer den Durchmesser auf $^3/_4$" vermindernden Ausrundung versehen) angestellt worden sind, sowie Versuche von Vickers u. A. bestätigen das von Kirkaldy Gefundene.

Material	Form des Stabes	Zugfestigkeit K_z (Gl. 6) in kg/qcm	Querschnittsverminderung ψ (Gl. 16)
Low Moor. Walzeisen, härteste Sorte	Fig. 16, $D = 2{,}54$ cm	4560	51,00 %
	„ 17, $d = 1{,}85$ „	6420	8,03 „
	„ 18, $d = 1{,}85$ „	4920	49,23 „
Govan. Geschmiedetes Walzeisen	Fig. 16, $D = 2{,}54$ cm	5025	40,71 %
	„ 17, $d = 1{,}78$ „	6910	13,77 „
	„ 18, $d = 1{,}78$ „	5020	36,02 „
Govan. Walzeisen	Fig. 16, $D = 2{,}59$ cm	4040	47,38 %
	„ 17, $d = 1{,}80$ „	4950	21,27 „
	„ 18, $d = 1{,}80$ „	4360	46,91 „

Die Erklärung ergiebt sich unmittelbar aus dem in § 7 Gesagten. Unter Einwirkung der Belastung dehnen sich die Fasern, welche durch den kleinsten Querschnitt *b b*, Fig. 17, gehen; gleichzeitig tritt eine Zusammenziehung senkrecht hierzu ein. Das bei *a a a a* an den kleinsten Querschnitt sich anschliessende Material setzt dieser Zusammenziehung Widerstand entgegen, d. h. übt in senkrechter Richtung zur Achse des Stabes Zugspannungen auf die durch den kleinsten Querschnitt gehenden und gespannten Längsfasern aus, welche Zugspannungen, wie die Gl. 15 in § 7 lehren, eine Verminderung der Längsdehnung zur Folge haben. Demnach greift das bei *a a a a* an den Querschnitt $\frac{\pi}{4} d^2$ anschliessende Material, indem es der Ausbildung der Zusammenziehung, sowie der Dehnung hinderlich in den Weg tritt, gewissermassen unterstützend gegenüber dem kleinsten Querschnitt ein und erhöht dessen Festigkeit. Dass die Zusammenziehung gehindert wurde, darüber geben die Werthe für ψ deutlich Auskunft.

Hieraus folgt im Allgemeinen für die genannten Materialien: Erschwerung oder theilweise Hinderung der Zusammen-

ziehung senkrecht zur Stabachse (Querschnittsverminderung) verringert die Dehnung in Richtung der letzteren und erhöht die Zugfestigkeit.

Zur Untersuchung des Einflusses der Länge der Eindrehung sowie der Ausrundung der letzteren hat Verfasser folgende Versuche mit Rundstäben nach Fig. 19 bis 22, je aus dem gleichen Material von bemerkenswerther Gleichartigkeit hergestellt, ausgeführt.

Stabform	Flusseisen			Schweisseisen		
	Zugfestigkeit K_z (Gl. 6) in kg/qcm	Querschnittsverminderung ψ (Gl. 16)	Dehnung auf 100 mm φ (Gl. 17)	Zugfestigkeit K_z (Gl. 6) in kg/qcm	Querschnittsverminderung ψ (Gl. 16)	Dehnung auf 100 mm φ (Gl. 17)
Fig. 19	4239	66 %	33 %	3664	34 %	28 %
	4242	66 „	36 „	3674	27 „	24 „
	4281	65 „	33 „	3676	28 „	26 „
Durchschnitt	4254	66 %	34 %	3670	30 %	26 %
Fig. 20	4428	62 %	—	3738	13 %	—
	4380	65 „	—	3701	12 „	—
	4447	63 „	—	3622	10 „	—
Durchschnitt	4418	63 %	—	3687	12 %	—
Fig. 21	5082	55 %	—	4154	25 %	—
	4935	55 „	—	4029	21 „	—
	5031	54 „	—	3925	24 „	—
Durchschnitt	5016	55 %	—	4036	23 %	—
Fig. 22	5894	50 %	—	4474	14 %	—

Die eingedrehten Flusseisenstäbe rissen sämmtlich in der Mitte der Eindrehung oder in der Nähe derselben; gleich verhielten sich die Schweisseisenstäbe nach Fig. 21 und 22. Die Schweisseisenstäbe nach Fig. 20 dagegen rissen nach Angabe der Fig. 20c am Ende der Eindrehung unter Bildung eines grösseren Spaltes,

wie in der Abbildung angedeutet ist. Dadurch erklärt sich die vergleichsweise geringe Querschnittsverminderung. Die scharfe Eindrehung führt also hier beim Schweisseisen zum Bruch, bei dem zähen Flusseisen dagegen nicht. Die Figuren 20a, 20b, 21a und 21b auf Taf. II geben die photographischen Bilder der Probestäbe nach dem Zerreissen und zwar

Fig. 20a einen Flusseisenstab nach Fig. 20,
„ 20b „ Schweisseisenstab „ „ 20,
„ 21a „ Flusseisenstab „ „ 21,
„ 21b „ Schweisseisenstab „ „ 21.

Die in vorstehender Zusammenstellung enthaltenen Ergebnisse zeigen, dass bei einer Eindrehungslänge von 25 mm der Einfluss

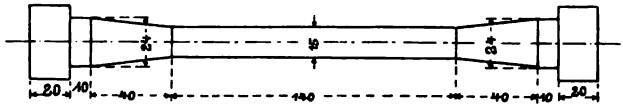


Fig. 19.

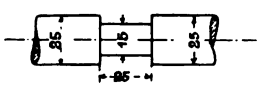


Fig. 20.

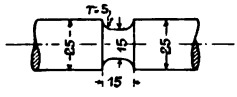


Fig. 21.

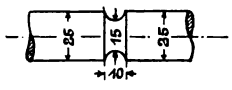


Fig. 22.

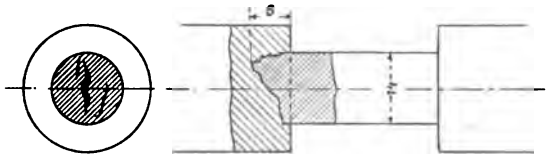


Fig. 20c.

der gehinderten Querzusammenziehung noch nicht erheblich ist, dass er dagegen mit Abnahme dieser Länge rasch wächst. Im Uebrigen bestätigen sie das oben hinsichtlich dieses Einflusses Ausgesprochene vollständig.

Der Letztere ist auch der Grund, weshalb die der Messung unterworfene Strecke der Probestäbe — Fig. 9 bis 11 in § 8 — kürzer gewählt werden muss, als der prismatische Theil derselben. Man hat sich eben zu sichern, dass ein solcher Einfluss innerhalb der der Beobachtung unterworfenen Strecke nicht mehr Geltung erlangen kann.

2. Einfluss der Länge und des Durchmessers.

In Bezug hierauf, sowie hinsichtlich des Einflusses der Querschnittsform hat der Chefingenieur Barba in Creusot umfassende Versuche anstellen lassen, die in der Hauptsache von Coureau und Biguet durchgeführt wurden (Barba, Mémoires et compte rendu des travaux de la Société des Ingénieurs Civiles 1880, S. 682—714). Die wesentlichen Ergebnisse finden sich im Folgenden unter A und B, sowie in Ziff. 3 unter A, B und C wiedergegeben.

Unter D, Ziff. 3 sind die aus neuester Zeit stammenden Ergebnisse der von Bauschinger in Bezug auf den Einfluss der Gestalt der Probestäbe durchgeführten Zugversuche zusammengestellt (Mittheilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der k. technischen Hochschule in München, 1892, Heft XXI).

In Einzelheiten weichen die Ergebnisse der Barba'schen Versuche von denjenigen der Bauschinger'schen Untersuchungen etwas ab. Es dürfte dies vorzugsweise davon herrühren, dass die von Materialungleichheiten veranlassten Abweichungen häufig bedeutend grösser sind, als die Unterschiede, welche die Verschiedenheit der Gestalt bedingt.

A. Die Versuchsstäbe haben verschiedene Durchmesser d, ebenso sind die der Messung unterworfenen Stabstrecken l verschieden lang und zwar derart, dass $l : d$ konstant.

Die Versuchsstäbe wurden aus gleich starken Stangen herausgearbeitet.

Gleiche Dauer der einzelnen Versuche wurde mit Sorgfalt erstrebt.

Die angegebenen Werthe sind je die Durchschnittszahlen aus einer Versuchsreihe.

Fig. $20^{a}_{=}$.

Fig. $21^{a}_{=}$.

Fig. $20^{b}_{=}$.

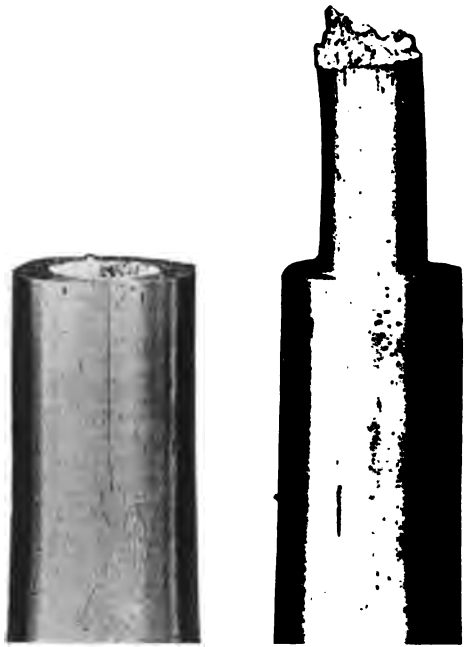


Fig. $21^{b}_{=}$.

Rundstäbe aus Flusseisen.

Nummer der Versuchsreihe	Durchmesser d cm	Stabstrecke l cm	Verhältniss $l:d$	Festigkeit K_z kg/qcm	Querschnittsverminderung $\psi = 100\frac{f-f_b}{f}$ %	Verlängerung $l_b - l$ cm	Dehnung $\varphi = 100\frac{l_b-l}{l}$ %
1	0,690	5,0	7,24	4220	69,3	1,64	32,8
2	1,035	7,5		4200	69,0	2,49	33,2
3	1,380	10,0		4210	69,7	3,30	33,0
4	1,725	12,5		4170	68,6	4,18	33,5
5	2,070	15,0		4160	69,2	5,08	33,6
6	2,415	17,5		4090	69,7	5,80	33,2
7	2,760	20,0		4000	68,8	6,60	33,0
8	3,105	22,5		3960	69,5	7,65	34,0
Durchschnitt				4130	69,2		33,3

Rundstäbe aus Flussstahl.

Nummer der Versuchsreihe	Durchmesser d cm	Stabstrecke l cm	Verhältniss $l:d$	Festigkeit K_z kg/qcm	Querschnittsverminderung $\psi = 100\frac{f-f_b}{f}$ %	Verlängerung $l_b - l$ cm	Dehnung $\varphi = 100\frac{l-l_b}{l}$ %
1	0,690	5,0	7,24	6480	36,5	1,00	20,0
2	1,035	7,5		6490	38,0	1,41	18,8
3	1,380	10,0		6390	37,4	1,82	18,2
4	1,725	12,5		6330	38,4	2,27	18,1
5	2,070	15,0		6350	31,8	2,70	18,0
6	2,415	17,5		6200	35,8	3,17	18,1
7	2,760	20,0		6320	34,4	3,90	19,5
8	3,105	22,5		nicht ermittelt			
Durchschnitt				6360	36,1		18,6

Die Versuchsergebnisse zeigen:

α) eine, wenn auch nicht bedeutende Abnahme der Festigkeit mit wachsendem Durchmesser,

β) Unabhängigkeit der Querschnittsverminderung ψ vom Durchmesser,

γ) Unabhängigkeit der Dehnung φ vom Durchmesser d und der Länge l, sofern das Verhältniss $l : d$ das gleiche bleibt.

B. Die Versuchsstäbe besitzen verschiedene Durchmesser, dagegen sind die der Messung zu Grunde gelegten Stabstrecken gleich lang.

Nummer des Versuchs	Durchmesser d cm	Stabstrecke l cm	Festigkeit K_z kg/qcm	Verlängerung $l_b - l$ cm	Dehnung $\varphi = 100 \frac{l_b - l}{l}$ %	Bemerkungen
1	2,0	10,0	3700	3,75	37,5	Flusseisen
2	1,0	10,0	3690	3,05	30,2	
3	0,5	10,0	3760	2,50	25,0	
1	2,0	10,0	5930	2,59	25,9	Flussstahl
2	1,0	10,0	5940	2,10	21,0	
3	0,5	10,0	6000	1,70	17,0	

Diese Versuchsergebnisse lehren, dass die Dehnung φ bei gleicher Grösse der Stabstrecke, welche der Bestimmung zu Grunde gelegt wird, in ziemlichem Masse abhängt von dem Durchmesser d und zwar derart, dass sie wächst mit zunehmendem Durchmesser.

Nach dem Ergebniss A, γ entfällt diese Abhängigkeit bei gleichem Verhältniss $l : d$.

Hieraus folgt, dass bei Forderung einer bestimmten Dehnung φ für eine bestimmte Stablänge l ein gewisser Durchmesser d vorgeschrieben sein muss. Sind die Durchmesser verschieden, so haben sich die Messlängen zu verhalten wie diese.

3. Einfluss der Querschnittsform.

A. Die Versuchsstäbe haben verschiedene Querschnittsform, jedoch gleichgrosse Querschnittsfläche.

Die angegebenen Werthe sind die Mittel aus je einer Reihe von Versuchen mit derselben Querschnittsform.

Querschnittsform	Festigkeit K_z kg/qcm	Querschnittsverminderung $\psi = 100\,\frac{f-f_b}{f}$ %	Dehnung $\varphi = 100\,\frac{l_b-l}{l}$ %
Rundstab	4150	58,3	32,7
Quadratstab . .	4170	57,3	33,7
Flachstab . . .	3960	56,5	36,0

Hieraus erhellt, dass rechteckige Querschnitte bei gleicher Grösse bedeutendere Dehnung ergeben als Rundstäbe.

B. Aus Versuchen mit 1 cm starken Flachstäben ergab sich

bei der Breite von 1 2 3 4 5 6 7 8 cm
die Dehnung auf 10 cm zu 31,0 34,0 35,0 37,2 39,0 40,8 38,5 34,5 %,
d. h. am grössten bei dem Querschnittsverhältniss 1 : 6.

Die Festigkeit betrug durchschnittlich 3870 kg.

C. Die Flachstäbe haben verschiedene Breite.

Nummer des Versuchs	Stärke a cm	Breite b cm	Verhältniss $b:a$	Festigkeit K_z kg/qcm	Dehnung $\varphi = 100\,\frac{l_b-l}{l}$ %	Bemerkungen
1	1,015	2,000	1,98	4270	29,5	Flusseisen
2	0,995	5,985	6,02	4130	35,0	
3	1,017	9,980	9,81	4020	40,0	
1	1,310	2,000	1,53	2400	51,5	Kupfer
2	1,308	5,980	4,57	2380	55,2	
3	1,313	9,990	7,61	2315	59,0	

Nach diesen Versuchen nimmt die Festigkeit mit der Breite etwas ab (vergl. auch A).

Hierbei ist nicht ausser Acht zu lassen, dass dieser Einfluss möglicher Weise von der Einspannung herrühren kann, und dass es überhaupt nicht leicht ist, bei verhältnissmässig breiten Stäben eine gleichmässige Vertheilung der Zugkraft über den Querschnitt zu sichern.

Wir schliessen aus den im Vorstehenden niedergelegten Versuchsergebnissen, dass Ergebnisse von Zugversuchen, streng genommen, nur dann unmittelbar verglichen werden können, wenn die Versuchsstäbe, sofern sie nicht dieselben Abmessungen besitzen, wenigstens geometrisch ähnlich sind.

	Mess-länge	Querschnitts-abmessung	Querschnitt
Gelten für 2 Rundstäbe			
die Grössen	l_1 l_2	d_1 d_2	$f_1 = \frac{\pi}{4} d_1^2$, $f_2 = \frac{\pi}{4} d_2^2$
und für 2 Flachstäbe die			
Grössen	l_1 l_2	$a_1 b_1$ $a_2 b_2$	$f_1 = a_1 b_1$, $f_2 = a_2 b_2$,

so findet sich als Bedingung der Vergleichbarkeit der ermittelten Dehnung für Rundstäbe

$$l_1 : l_2 = d_1 : d_2 = \sqrt{\frac{\pi}{4} d_1^2} : \sqrt{\frac{\pi}{4} d_2^2} = \sqrt{f_1} : \sqrt{f_2},$$

und für Flachstäbe mit Annäherung

$$l_1 : l_2 = \sqrt{a_1 b_1} : \sqrt{a_2 b_2} = \sqrt{f_1} : \sqrt{f_2}.$$

Der Satz, welcher soeben hinsichtlich der Vergleichbarkeit der Versuchsergebnisse festzustellen war, gilt mit der in § 10 ausgesprochenen Ergänzung dahingehend, dass auch die Geschwindigkeiten, mit welchen die Versuche durchzuführen sind, ausreichend übereinstimmen müssen, gleichfalls für alle anderen Beanspruchungsarten.

D. Versuche mit Rund- und Flachstäben aus Fluss- und Schweisseisen.

Bauschinger gelangte hinsichtlich des Einflusses der Form der Probestäbe zu folgenden Ergebnissen.

a) Der Dehnungskoefficient (α, Gl. 3), wie er durch die üblichen Messungen an der Oberfläche der Stäbe erhalten wird, ist bei Rundstäben etwas kleiner als bei Flachstäben aus dem gleichen Material; bei dicken Flachstäben etwas kleiner, als bei dünnen und überhaupt bei grösseren Querschnittsabmessungen ein wenig geringer als bei kleineren Querschnitten. Alle diese Unterschiede sind jedoch nur gering und werden durch zufällige, von Materialungleichheiten herrührende Abweichungen weit übertroffen.

b) Die Zugfestigkeit (K_z, Gl. 6) erscheint von der Querschnittsform nicht beeinflusst.

c) Die Querschnittsverminderung (ψ, Gl. 16) ist bei Flachstäben von der Form und Grösse des Querschnittes unabhängig. Stärkere Rundstäbe geben etwas kleinere Werthe für dieselbe als schwächere aus dem gleichen Material, doch ist der Unterschied nicht bedeutend.

d) Die Dehnung (φ, Gl. 17), gemessen für eine bestimmte ursprüngliche Länge, ist von der Querschnittsform, von dem Verhältniss der Breite zur Dicke bei Flachstäben, also davon, ob der Querschnitt überhaupt kreisrund oder rechteckig ist, nicht abhängig; aber sie wächst mit der Grösse f des Querschnittes derart, dass

$$\varphi = a + b\sqrt{f}$$

gesetzt werden kann, worin die Koefficienten a und b wesentlich von der Beschaffenheit des Materials abhängen.

e) Vergleichbare Ergebnisse für die Dehnung (φ, Gl. 17) werden erhalten, wenn man die Messlänge der Probestäbe proportional der Quadratwurzel aus dem Querschnitt wählt. Unter Zugrundelegung eines Normal-Rundstabes von 20 mm Stärke und 200 mm Messlänge ergiebt sich die proportionale Länge eines Probestabes vom Querschnitt f gleich

$$200 \cdot \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{\frac{\pi}{4} \cdot 20^2}} = 11{,}3\sqrt{f} \text{ Millimeter},$$

sofern f in qmm eingesetzt wird.

f) Das in der Fussbemerkung S. 24 und 25 zuerst angegebene Verfahren zur Messung der Dehnung erscheint genügend genau, so lange die Bruchstelle noch wenigstens ein Viertel der Messlänge von den Enden der letzteren abliegt. Dabei sind Rundstäbe auf zwei entgegengesetzten Seiten, Flachstäbe auf einer Breitseite zu messen.

g) Querschnittsverminderung (ψ, Gl. 16) und Dehnung (φ, Gl. 17) stehen in keinem Zusammenhang.

h) Proportionalitäts- und Streckgrenze können auch dann, wenn die Probestäbe sorgfältigst ausgeglüht worden sind, in einem und demselben Eisenstück oder in Stücken der nämlichen Erzeugungsfolge in so hohem Grade verschieden sein, dass dagegen alle anderen Einflüsse, diejenigen der Form und der Grösse des Querschnittes, falls sie überhaupt vorhanden sind, verschwinden.

Wird die Proportionalitätsgrenze von zerrissenen Stäben gleichen Materials bestimmt, so ergiebt sie sich nahezu gleich hoch gehoben, wie hoch oder niedrig sie auch ursprünglich gelegen war. Dieses interessante Ergebniss lassen die folgenden, für 3 Paar Flachstäbe giltigen Zahlen deutlich erkennen.

Bezeichnung des Probestabes	Ursprünglich			Nach dem Zerreissen	
	Dehnungskoefficient	Proportionalitätsgrenze kg/qcm	Streckgrenze kg/qcm	Dehnungskoefficient	Proportionalitätsgrenze kg/qcm
IV 1a	$\frac{1}{2230000}$	2350	2460	$\frac{1}{2280000}$	2700
IV 2c	$\frac{1}{2080000}$	1000	1670	$\frac{1}{2160000}$	2700
07c	$\frac{1}{2130000}$	1840	2130	$\frac{1}{2220000}$	2800
07a	$\frac{1}{2160000}$	1290	2080	$\frac{1}{2130000}$	2850
16a	$\frac{1}{2170000}$	2230	2370	$\frac{1}{2245000}$	2930
16d	$\frac{1}{2150000}$	1290	2230	$\frac{1}{2210000}$	2910

§ 10. Versuchsergebnisse über den Einfluss der Zeit auf Festigkeit, Dehnung und Querschnittsverminderung.

Von neueren Untersuchungen, welche den schon längst bekannten, auch in § 5 bereits erörterten Einfluss der Zeitdauer des Versuchs nachweisen, seien die folgenden angeführt.

Versuchsreihen mit Rundstäben von 1,6 cm Stärke aus Flusseisen.

Dauer des Versuchs	Festigkeit K_z	Dehnung, gemessen auf 10 cm
2,5 Minuten	3935 kg	32 %
75 „	3720 „	34 „

(Barba, Mémoires et compte rendu des travaux de la Société des Ingénieurs Civils, 1880, S. 710.)

Feinkorneisen.

Dauer des Versuchs	Festigkeit K_z	Dehnung φ	Festigkeit K_z	Dehnung φ
Rasch zerrissen	4990 kg	22 %	4340 kg	23,3 %
Langsam zerrissen	4493 „	25,2 „	3770 „	28,8 „

Gewöhnliches Puddeleisen.

Dauer des Versuchs	Festigkeit K_z	Dehnung φ
Rasch zerrissen	3720 kg	30,4 %
Langsam zerrissen	3516 „	35,23 „

Harter Wolframstahl.

Dauer des Versuchs	Festigkeit K_z	Festigkeit K_z	Festigkeit K_z
Rasch zerrissen	14350 kg	13270 kg	11359 kg
Langsam zerrissen	12300 „	11339 „	10230 „

Dehnung 1 bis 1,5 %.

(Goedicke, Oest. Zeitschrift für Berg- u. Hüttenwesen 1883, S. 578.)

Hiernach ergeben rascher durchgeführte Versuche eine grössere Festigkeit, sowie eine kleinere Dehnung und (nach Versuchen des Verfassers) in der Regel auch eine kleinere Querschnittsverminderung. Dadurch erklärt es sich, dass die Prüfung eines und desselben Materials, welche an der

einen Stelle sehr rasch durchgeführt worden ist, daselbst ungenügende Dehnung und Querschnittsverminderung ergiebt, an einer zweiten Stelle, langsamer vorgenommen, die bedungene Dehnung und Querschnittsverminderung ausweist.

Leder.

Dauer des Versuchs	Festigkeit K_z
1 Stunde 26 Minuten	301 kg
166 Tage	200 „

(George Leloutre, Les transmissions par courroies, cordes et cables métalliques, Paris 1884, oder des Verfassers Bericht hierüber in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1884, S. 871. Daselbst finden sich auch Mittheilungen über das asymptotische Wachsthum der Verlängerung mit der Dauer der Belastung, sowie über das dementsprechende Verhalten bei Entlastung.)

Hanfseile.

Die ursprünglich 750 mm lange, der Beobachtung unterworfene Strecke eines 55 mm starken Seiles aus badischem Schleisshanf, welches nach und nach bis zu 500 kg belastet worden ist, zeigt, nachdem diese Belastung 10 Minuten gewirkt hat, die Länge 788,4 mm. Das Seil bleibt längere Zeit hindurch derselben Anstrengung ausgesetzt.

Es beträgt nach	10 Minuten	1	7	26	50	82	120 Std.
die Seillänge	788,4	789,7	791,8	793,2	794,5	795,8	796,5 mm
entsprechend einer weiteren Verlängerung um	0	1,3	3,4	4,8	6,1	7,4	8,1 „

Hierauf wurde das Seil bis auf 100 kg entlastet.

Es beträgt	unmittelbar nach der Entlastung,	nach 34 Stunden
die Seillänge	791,9 mm	790,8 mm
entsprechend einer Verkürzung um	4,6 „	5,7 „

(Des Verfassers Versuche über die Elasticität von Treibriemen und Treibseilen in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1887, S. 221 u. f.)

In sehr anschaulicher Weise lässt sich der Einfluss der Geschwindigkeit, mit welcher das Zerreissen erfolgt, zeigen durch

Verwendung von selbstzeichnenden Festigkeitsmessern mit Federbelastung.
(Hugo Fischer, Dingler's polyt. Journal 1884, Bd. 251, S. 337 u. f.)

Nach Massgabe des im Vorstehenden enthaltenen Materials wird behufs Erlangung vergleichbarer Versuchsergebnisse davon auszugehen sein, dass auch die Geschwindigkeit bei der Durchführung der Versuche entsprechend gewesen sein muss (vergl. Schluss von § 9). Dabei ist, wie bereits in § 5 hinsichtlich des Einflusses der Zeit bemerkt wurde, die Art des Stoffes im Auge zu behalten. Beispielsweise wird ein Stab aus hartem Stahl ausserordentlich rasch zerrissen werden müssen, soll ein Einfluss der Zeit auf das Ergebniss hervortreten. Dagegen wird sich dieser bei einem Lederriemen auch noch im Falle längerer Versuchsdauer feststellen lassen.

Die unmittelbare Vergleichbarkeit der Prüfungsergebnisse setzt somit voraus: entweder es ist jeweils die Versuchsdauer so lang, dass der Einfluss der Zeit ein unmerklicher, oder es muss die Geschwindigkeit, mit welcher die Dehnung erfolgt, wenigstens angenähert die gleiche Grösse besitzen.

In neuester Zeit von Bauschinger ausgeführte Versuche über den Einfluss der Zeit bei Zugproben mit verschiedenen Metallen haben nach dessen Mittheilung zu dem Ergebnisse geführt, dass bei Fluss- und Schweisseisen, bei Kupfer, bei Messingblech und bei Bronceguss ein Einfluss der Zeit oder der Geschwindigkeit, mit welcher die Dehnung vorgenommen wird, nicht oder kaum merklich ist innerhalb der Grenzen, in denen diese Versuche durchgeführt worden sind. Bei Messingguss ist er sehr gering und wird, wenn überhaupt vorhanden, leicht durch zufällige Ungleichmässigkeiten des Materials verdeckt; ebenso bei Zinkguss und Gusseisen. Bei Zinkblech dagegen ist er im Verlaufe des Arbeitsdiagrammes (vergl. Fussbemerkung 2, S. 26) sowohl als auch bei der Bruchbelastung ($E_2 E$, Fig. 4) deutlich erkennbar, nicht aber an der Dehnung (φ, Gl. 17) und Querschnittsverminderung (ψ, Gl. 16). Bei Blei (Guss- und Walzblei) ist der Einfluss der Zeit unsicher gegenüber dem Verlaufe des Arbeitsdiagrammes, unverkennbar an der Bruchbelastung und kaum bemerkbar an der Bruchdehnung. Am grössten erwies sich der in Rede stehende Einfluss bei gegossenem Zinn. (Mittheilungen aus

dem mechanisch-technischen Laboratorium der k. technischen Hochschule in München, 1891, Heft XX.)

Die Dauer dieser Bauschinger'schen Versuche z. B. mit den 4 Flusseisenstäben betrug nach Ueberschreiten der Streckgrenze und unter Abrechnung der Ruhepausen (von 30 Min., 17 Min., 22 St. 32 Min., 22 Min.) 26, 41, 46 und 77 Minuten, d. s. Zeiträume, von denen der kleinste noch bedeutend grösser erscheint als derjenige, innerhalb dessen sich bei Flusseisen der Einfluss der Dauer des Versuchs durch die Prüfungsergebnisse überhaupt deutlich äussert; sie liegen somit ausserhalb des Gebietes, welches für die obigen Darlegungen wie auch für diejenigen des § 5 in Betracht kommt. Bei Beachtung dieses Umstandes klärt sich der Widerspruch auf, welcher zwischen den Ergebnissen der Bauschinger'schen Versuche und dem oben Angeführten zu bestehen scheint.

II. Druck.

Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äusseren Kräfte ergeben für jeden Querschnitt desselben eine Kraft, deren Richtungslinie in die Stabachse fällt und welche diese zu verkürzen strebt. Die Querschnittsabmessungen werden als so bedeutend vorausgesetzt, dass der Fall der Knickung (§ 23) nicht vorliegt.

§ 11. Formänderung. Druckfestigkeit.

Fig. 23.

Der Cylinder Fig. 23, welcher ursprünglich die Länge l und den Durchmesser d, also den Querschnitt $\frac{\pi}{4} d^2$ besass, ändert unter der Einwirkung der Kräfte PP, welche sich an ihm das Gleichgewicht halten, seine Form. Diese Formänderung besteht in einer Verminderung der Länge l auf l_1, d. h. um $\lambda = l - l_1$ und in einer Vergrösserung des Durchmessers auf d_1, d. h. um $\delta = d_1 - d$. Es findet

also gleichzeitig eine Verkürzung, eine Zusammendrückung in Richtung der Stabachse und eine Vergrösserung der Querschnitte, eine Querausdehnung, statt.

Der Vergleich dieser bei Druckwirkung auftretenden Erscheinungen mit den in § 1 bei Zugwirkung besprochenen zeigt, dass die Umkehrung der Kraftrichtung auch die Formänderung umkehrt. Die Richtung der ziehenden Kraft als positiv, diejenige der Druckkraft als negativ bezeichnet, so hat zur Folge

$+P$ eine positive Dehnung in Richtung der Stabachse, und
„ negative „ senkrecht zur „
$-P$ „ „ „ in Richtung der „ und
„ positive „ senkrecht zur „

Ebenso findet Umkehrung der Spannungsrichtung statt: Die Zugkraft giebt eine positive Spannung (Spannung im engeren Sinne des Wortes oder Zugspannung), die Druckkraft eine negative Spannung (Pressung oder Druckspannung).

Dementsprechend werden für den auf Druck in Anspruch genommenen Körper die zur Beurtheilung nöthigen Beziehungen sich durch Umkehrung der im Bisherigen für Zugbeanspruchung aufgestellten Gleichungen gewinnen lassen, in welcher Beziehung auf § 12 zu verweisen ist.

Wir erhalten so die Grössen:

negative Dehnung $= \frac{\lambda}{l}$, d. i. die auf die Einheit der ursprünglichen Länge l bezogene Verkürzung,

Dehnungskoefficient gegenüber Druck, d. i. die Verkürzung eines Stabes von der ursprünglichen Länge 1 bei der Belastung von 1 Kilogramm auf die Flächeneinheit, oder kurz: die Verkürzung der Längeneinheit für das Kilogramm Pressung,

und für den Fall, dass diese Zahl bis zu einer gewissen Pressung konstant ist, in der letzteren die

Proportionalitätsgrenze gegenüber Druck,

Fliess- oder Quetschgrenze, d. i. diejenige Druckspannung, bei welcher das Material verhältnissmässig rasch nachgiebt, ohne dass Zerstörung eintritt.

Hinsichtlich dieser Grössen gelten sinngemäss dieselben Bemerkungen, welche in § 2 über sie für den Fall gemacht worden sind, dass es sich um Belastung durch eine Zugkraft handelt.

Wird die Belastung des in eine Prüfungsmaschine gespannten Prisma fortgesetzt gesteigert, so tritt schliesslich ein Augenblick ein, in welchem der Widerstand des gedrückten Körpers aufhört, der Belastung das Gleichgewicht zu halten; der Widerstand erscheint überwunden: das Prisma wird zerdrückt, d. h. mehr oder minder vollständig zertrümmert, wie z. B. harte Gesteine, oder es wird zerquetscht, d. h. sein Material weicht nach der Seite aus, fliesst seitlich ab, wie z. B. Blei. Streng genommen wird in beiden Fällen der Widerstand dadurch überwunden, dass das Material nach der Seite ausweicht: im ersteren Falle erfolgt diese Ausweichung nach vorhergegangener oder gleichzeitiger Zertrümmerung, im letzteren dagegen behält der weiche, bildsame Stoff seinen Zusammenhang bei.

Beobachten wir einen dem Zerdrücken ausgesetzten Sandsteinwürfel, so sieht man bei normalem Verlaufe an den Mantelflächen Platten sich ablösen, welche in der Mitte stärker sind, als nach den in die Druckflächen verlaufenden Rändern hin. Im Innern dagegen bilden sich zwei pyramidale Bruchstücke aus, wie dies die Fig. 24 (Tafel III) deutlich erkennen lässt; die Platten, welche sich seitlich lösten, sind hierbei weggenommen. Man erkennt, wie das Material von den beiden Stirnflächen aus je in pyramidaler Form in das Innere gedrückt worden ist. (Vergl. auch § 13, Ziff. 2, a, D.) Werden die Druckplatten der Prüfungsmaschine einander noch weiter genähert, so pflegt sich der Zusammenhang der beiden Pyramiden durch Abschiebung zu lösen.

Ein dem Zerdrücken ausgesetzter Bleicylinder baucht sich zunächst aus, wie Fig. 25 (Tafel III) zeigt, und geht schliesslich bei fortgesetzter Näherung der Druckplatten in eine immer dünner werdende Scheibe über. Ursprünglich besass der wiedergegebene Cylinder einen Durchmesser und eine Höhe von je 80 mm; sein Mantel war durch 7 Parallelkreise in Abständen von je 10 mm und durch 25 senkrechte Gerade in Abständen von je $\frac{\pi 80}{25} = 10{,}05$ mm in 200 Quadrate eingetheilt. Fig. 25 stellt den Cylinder dar, nach-

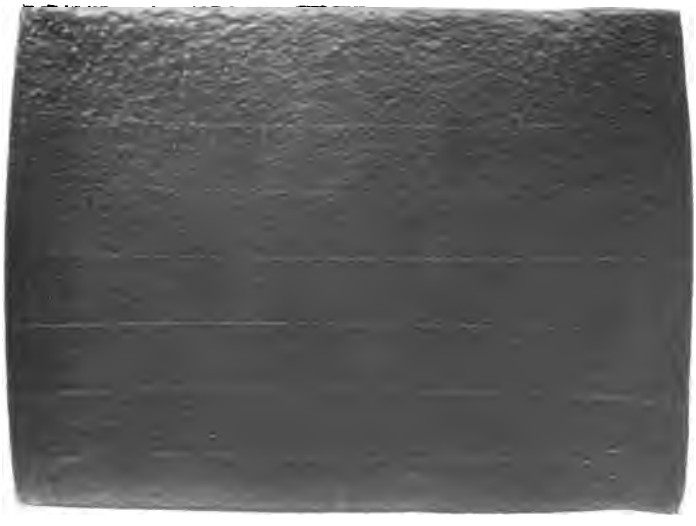
Fig. 24.

Fig. 25.

Fig. 28.

Fig. 27. (Grundriss.)

Fig. 26. (Aufriss.)



dem er auf 64 mm, d. i. 0,8 seiner ursprünglichen Höhe zusammengedrückt ist. Wie ersichtlich, haben sich die Höhen der beiden End- oder Stirnschichten am stärksten vermindert (von 10 mm auf 6,5 mm, d. h. um 35 % gegen 20 % durchschnittliche Verringerung, entsprechend einer Bewegung des Materials in das Innere des Körpers, von wo aus der Stoff nach dem Umfange zu ausweicht).

Fig. 26 und 27 (Tafel IV) geben einen Bleiwürfel wieder, welcher ursprünglich 80 mm Seitenlänge besass und dessen 6 Begrenzungsebenen je in 64 gleiche Quadrate eingetheilt worden waren. Fig. 26 zeigt den Aufriss des auf 64 mm zusammengedrückten Körpers und lässt deutlich die Figuren erkennen, in welche die kleinen Quadrate übergegangen, sowie den Umstand, dass auch hier die beiden Stirnschichten am meisten zusammengepresst oder richtiger, dass deren Material zum Theil in das Innere gedrückt worden ist. Der Grundriss (Fig. 27) giebt die eigenthümliche Wölbung wieder, welche die ursprünglich ebenen vier Seitenflächen bei der Zusammendrückung angenommen haben.

Die 3 in Fig. 28 (Tafel IV) dargestellten Bruchstücke gehören Gusseisencylindern von verschiedener Höhe an. Auch hier ist zunächst eine Ausbauchung zu beobachten, welche schliesslich in Zerstörung übergeht. Die höheren Cylinder (40 mm bei 19,9 mm Durchmesser) schieben sich ab, die niederen (19,8 mm Höhe bei 19,8 mm Durchmesser) erfahren die aus der Figur ersichtliche eigenartige Zertrümmerung. (Vergl. § 13, Ziff. 1 a.)

Zähes Flusseisen in genügend kurzen Stücken verhält sich ähnlich wie Blei. Die Versuchscylinder nehmen fassartige Gestalt an, ohne dass eine Zerstörung eintritt.

Die Belastung, bei welcher der Widerstand des gedrückten Körpers überwunden wird, dieser also der Zertrümmerung verfällt oder in dem geschilderten Sinne nach der Seite abfliesst, heisst Bruchbelastung. Die Pressung, welche dieser Belastung, die mit P_{max} bezeichnet werden mag, entspricht, wird Druckfestigkeit genannt. Dieselbe ist hiernach

$$K = \frac{\text{Bruchbelastung}}{\text{Stabquerschnitt}}.$$

In der Regel pflegt man als Nenner den ursprünglichen Querschnitt f des Stabes in die Rechnung einzuführen und erhält dann in

$$K = \frac{P_{max}}{f} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 18)$$

die Druckfestigkeit, bezogen auf den ursprünglichen Stabquerschnitt (vergl. das in § 3 über die Zugfestigkeit Bemerkte).

Körper aus Materialien, welche unter Einwirkung der Druckbelastung nach der Seite ausweichen, ohne dass hierbei eine Zerstörung eintritt, vergrössern ihren Querschnitt; in Folge dessen wächst die zu weiterer Zusammendrückung erforderliche Kraft. In solchen Fällen ist es selbstverständlich unzulässig, die am Ende einer weitgetriebenen Zusammendrückung beobachtete Kraft P_{max} durch den ursprünglichen Querschnitt zu dividiren und in diesem Quotienten ein Maass der Widerstandsfähigkeit des Materials erblicken zu wollen.

Diese erscheint gegenüber den Zwecken der Konstruktion erschöpft, sobald das Abfliessen nach der Seite beginnt; die Druckfestigkeit ist dann die Fliess- oder Quetschgrenze.

§ 12. Gleichungen der Druckelasticität und der Druckfestigkeit.

Es bedeuten für den prismatischen Stab

P die auf Druck wirkende Kraft,

f die Grösse des ursprünglichen Stabquerschnitts,

l die Länge des Stabes vor Einwirkung der Kraft,

λ die Verkürzung, welche der Stab durch P erfährt,

$-\varepsilon = -\frac{\lambda}{l}$ die negative Dehnung, d. i. die verhältnissmässige Zusammendrückung oder Verkürzung,

α den Dehnungskoefficienten gegenüber Druckbeanspruchung, d. i. die Verkürzung der Längeneinheit für das Kilogramm Spannung,

$-\sigma$ die Spannung, welche mit der Dehnung $-\varepsilon$ verknüpft ist, also durch P hervorgerufen wird,

k die zulässige Anstrengung des Materials gegenüber Druckbeanspruchung.

Dann gilt

$$P = -\sigma f, \quad \ldots \ldots \quad 19)$$

$$P \leqq k f, \quad \ldots \ldots \quad 20)$$

$$\lambda = -\alpha l \sigma = \alpha l \frac{P}{f} \ldots \ldots \quad 21)$$

Für einen gedrückten Stab mit veränderlichem Querschnitt, entsprechend der Fig. 7 in § 6, jedoch mit auf Verkürzung hinwirkender Kraft P, gelangt man bei Benutzung der daselbst eingeführten Grössen f_0 und x zu den Beziehungen

$$P \leqq k f_0, \quad \ldots \ldots \quad 22)$$

$$\lambda = P \int_0^l \alpha \frac{dx}{f} \ldots \ldots \quad 23)$$

Die Voraussetzungen, welche diesen Gleichungen zu Grunde liegen, sind:

1. Die äusseren Kräfte ergeben für jeden Querschnitt nur eine in die Stabachse fallende Druckkraft.
2. Auf die Stirnflächen des Stabes wirken nur senkrecht gegen dieselben gerichtete Kräfte.
3. Auf die Mantelfläche des Stabes wirken Kräfte nicht.
4. Der Einfluss des Eigengewichtes des Körpers kommt nicht in Betracht.
5. Die Abmessungen des Querschnittes sind so bedeutend, dass der Fall der Knickung (§ 23) nicht vorliegt.
6. Die Dehnungen und Spannungen sind in allen Punkten des beliebigen Querschnittes gleich gross. (Gleichmässige Vertheilung der Druckkraft über den Querschnitt.)
7. Die Form des Querschnittes ist gleichgiltig.
8. Sofern nur die Voraussetzung 5 erfüllt wird, ist die Länge oder Höhe des Stabes ohne Einfluss.

§ 13. Druckversuche.
Einfluss der Gestalt des Körpers auf die Druckfestigkeit.

Der Probekörper muss so in die Prüfungsmaschine eingespannt werden, dass die Druckkraft sich möglichst gleichmässig über den Querschnitt vertheilt. Zur Erfüllung dieser Bedingung wird die eine der beiden Druckplatten der Einspannvorrichtung möglichst leicht beweglich angeordnet (Kugellagerung); ausserdem werden die Probekörper je mit zwei möglichst genau parallelen, ebenen Druckflächen (durch Hobeln — erforderlichenfalls mit Diamantstahl — oder durch Abdrehen auf der Planscheibe) versehen. Das zuweilen noch gebrauchte Verfahren, die Befriedigung der letzteren Forderung dadurch zu umgehen, dass zwischen Druckplatte und Probekörper nachgiebige Scheiben, wie z. B. Bleiplatten, gelegt werden, erscheint unzulässig. Dieses bildsame, unter der hohen Pressung als dicke Flüssigkeit sich verhaltende Material wird bei Probekörpern aus einigermassen festen und dichten Stoffen, wie Eisen, Basalt u. dergl. herausgequetscht, also nichts nützen, bei Probekörpern aus porösen oder Vertiefungen besitzenden Steinen u. dergl. dagegen in die Poren sowie Vertiefungen eindringen und auf Sprengung hinwirken, also zu dem reinen Vorgange des Zerdrückens andere Wirkungen hinzufügen.

Die in § 11 besprochenen Erscheinungen beim Zerdrücken der Körper treten in der geschilderten Reinheit nur dann auf, wenn die Probewürfel mit ihren parallelen, ebenen Stirnflächen gleichmässig und unmittelbar an den Druckplatten anliegen.

Die in den §§ 11 und 12 enthaltenen Gleichungen lassen die Gestalt des Körpers gleichgiltig erscheinen, sofern nur nicht der Fall der Knickung (§ 23) vorliegt. Thatsächlich entspricht dies jedoch nicht der Wirklichkeit: die Querschnittsform ist nicht ganz gleichgiltig, ganz besonders aber beeinflusst die Höhe des Körpers dessen Druckfestigkeit. In dieser Beziehung geben die folgenden, aus neuerer Zeit stammenden Versuchsergebnisse deutlich Auskunft.

I. Die Belastung trifft die ganze Stirnfläche des Probekörpers.

a) Versuche des Verfassers mit Gusseisen (vorzüglicher Beschaffenheit).

Cylinder aus einem und demselben Gusseisen-Rundstab, der bei 2,00 cm Durchmesser (bearbeitet) eine Zugfestigkeit von 1860 kg ergeben hatte.

Die Zahlen sind das Mittel aus je 3 Versuchen.

Versuchsreihe	Höhe cm	Durchmesser cm	Querschnitt qcm	Druckfestigkeit nach Gl. 18 kg/qcm
1	4,00	1,99	3,11	7232
2	1,98	1,98	3,08	7500
3	1,00	1,99	3,11	8579

Die Druckfestigkeit wächst hiernach mit abnehmender Höhe der Versuchskörper.

Sie beträgt für den Fall, dass die Höhe des Cylinders gleich dem Durchmesser desselben ist, das

$$\frac{7500}{1860} = \sim 4\text{fache}$$

der Zugfestigkeit.

Bei den Versuchsreihen 1 und 2 erhaltene Bruchstücke sind in Fig. 28 (Tafel IV) dargestellt.

Prismen von kreisförmigem und von quadratischem Querschnitt aus einem und demselben Gusseisen-Rundstab, dessen Zugfestigkeit zu 2082 kg ermittelt worden war.

Querschnittsform	Durchmesser cm	Quadratseite cm	Höhe cm	Querschnitt qcm	Druckfestigkeit nach Gl. 18 kg/qcm
○	1,70	—	1,70	2,27	7771
□	—	1,70	1,70	2,89	7509

Die Druckfestigkeit ergiebt sich demnach für den kreisförmigen Querschnitt etwas grösser als für den quadratischen.

b) Versuche von Bauschinger mit Sandstein.

Mittheilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der königl. polytechnischen Schule in München. 6. Heft. München 1876.

Bauschinger stellte auf Grund der Ergebnisse seiner eigenen Versuche (s. unten) und derjenigen Anderer für die Druckfestigkeit die Gleichung

$$K = \left(\alpha + \beta \frac{\sqrt{f}}{h}\right) \sqrt{\frac{\sqrt{f}}{\frac{u}{4}}} \quad \ldots\ldots 24)$$

auf, giltig für Prismen, bei denen

$$h \leqq 5a, \text{ sofern } a^2 = f, \text{ d. i. } a = \sqrt{f}.$$

Hierin bedeutet

f den Querschnitt des Prisma in qcm,
u den Umfang dieses Querschnittes in cm,
h die Höhe des Prisma in cm,
K die Bruchbelastung in kg/qcm,
α und β Konstante, welche von der Art des Materials abhängen.

Bauschinger hält übrigens die einfachere Gleichung

$$K = \left(\alpha + \beta \frac{\sqrt{f}}{h}\right) \frac{\sqrt{f}}{\frac{u}{4}} \quad \ldots\ldots 25)$$

für ausreichend; nur wenn die Ergebnisse der Versuche von Rondelet und Vicat einbezogen werden sollen, erscheint es nöthig, auf Gl. 24 zurückzugreifen.

A. Prismen von rechteckigem Querschnitt, hergestellt aus einer und derselben Platte von sehr feinem graublauen Schweizer Sandstein.

Druckrichtung senkrecht zum Lager.

No.	Seite a cm	Seite b cm	Höhe h cm	Querschnitt ab qcm	Druckfestigkeit K in kg qcm	
					beobachtet, Gl. 18	berechnet nach Gl. 26
1	2	3	4	5	6	7
1	9,95	9,85	9,6	98,01	680	666
2	10,0	9,85	9,7	98,50	685	663
3	6,0	5,85	5,7	35,10	670	670
4	5,2	5,2	5,05	27,04	690	666
5	4,8	4,7	1,1	22,56	1950	1805
6	5,0	4,6	1,1	23,00	1910	1818
7	4,4	9,7	1,1	42,68	2140	2273

Die Versuche No. 1 bis 4 sind angestellt mit Prismen, deren Querschnitt als quadratisch angesehen werden darf und deren Höhe angenähert gleich der Seite des Quadrates ist. Die Werthe der Spalte 6 für diese 4 Versuche lassen erkennen, dass Würfel von verschiedener Grösse, jedoch aus gleichem Material hergestellt, die gleiche Druckfestigkeit besitzen.

Die Versuche No. 5 und 6 beziehen sich auf Prismen mit angenähert quadratischem Querschnitt und einer Höhe, welche weit kleiner ist, als die Querschnittsabmessungen. Die Zahlen in der Spalte 6 lehren, dass die Druckfestigkeit unter sonst gleichen Verhältnissen mit abnehmender Höhe wächst.

Das Ergebniss des Versuches No. 7, verglichen mit den Ergebnissen, welche für No. 5 und 6 erlangt wurden, zeigt, dass die Druckfestigkeit unter übrigens gleichen Verhältnissen mit wachsender Grundfläche zunimmt.

Aus 18 derartigen Versuchen (Tab. III, S. 10 der Mittheilungen), wobei die Höhe h die Seiten nicht überschreitet, berechnen sich

die Grössen α und β der Gl. 24 zu $\alpha = 310$ und $\beta = 346$, sodass diese übergeht in

$$K = \left(310 + 346\,\frac{\sqrt{f}}{h}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{f}}{\frac{u}{4}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 26)$$

Die Uebereinstimmung der hieraus ermittelten und in der Spalte 7 eingetragenen Werthe mit den beobachteten (Spalte 6) ist eine recht gute.

B. Prismen, wie unter A.

Druckrichtung parallel zum Lager.

No.	Seite a cm	Seite b cm	Höhe h cm	Querschnitt ab qcm	Druckfestigkeit K in kg/qcm	
					beobachtet, Gl. 18	berechnet nach Gl. 27
1	2	3	4	5	6	7
1	10,0	9,9	29,5	99	444	371
2	10,0	9,8	9,7	98	602	588
3	6,6	6,5	4,75	42,9	676	684
4	4,8	4,6	1,4	22,08	1540	1337
5	4,7	10,0	1,4	47,00	1850	1767

Aus 17 derartigen Versuchen (Tab. II, S. 9 der Mittheilungen), wobei die Höhe h die Querschnittsabmessungen bedeutend überschreitet, ergiebt sich $\alpha = 262$ und $\beta = 320$, also

$$K = \left(262 + 320\,\frac{\sqrt{f}}{h}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{f}}{\frac{u}{4}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 27)$$

C. Prismen von kreisförmigem und von rechteckigem Querschnitt, hergestellt aus feinkörnigem gelben Buntsandstein (Heilbronn).

Druckrichtung parallel zum Lager.

No.	Querschnittsform	Durchmesser cm	Seite a cm	Seite b cm	Höhe h cm	Querschnitt $\frac{\pi}{4}d^2$, bzw. ab qcm	Druckfestigkeit in kg/qcm		
							beobachtet, Gl. 18	berechnet	
								Gl. 28, bzw. 29	Gl. 30
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	□	—	9,25	9,18	36,3	84,91	381	377	387
2	○	9,2	—	—	36,25	66,47	451	418	407
3	□	—	9,05	9,17	12,45	82,99	440	436	444
4	○	9,22	—	—	12,20	66,76	463	473	473
5	□	—	9,20	9,22	2,73	84,82	790	754	755
6	○	9,15	—	—	2,90	65,75	806	733	729

Aus 18 solchen Versuchen (Tab. V, S. 11 der Mittheilungen) wird unter Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate zur Bestimmung der Werthe α und β in Gl. 24 erhalten

für die rechteckigen Prismen:

$$K = \left(347 + 121\,\frac{\sqrt{f}}{h}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{f}}{\frac{u}{4}}}, \quad \ldots \quad 28)$$

für die Kreiscylinder:

$$K = \left(369 + 115\,\frac{\sqrt{f}}{h}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{f}}{\frac{u}{4}}}, \quad \ldots \quad 29)$$

für sämmtliche Prismen:

$$K = \left(358 + 118\,\frac{\sqrt{f}}{h}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{f}}{\frac{u}{4}}}. \quad \ldots \quad 30)$$

Im Ganzen erweist sich hiernach der Einfluss der Querschnittsform auf die Festigkeit kurzer Prismen — im Gegensatze zu demjenigen der Höhe — als nicht bedeutend.

c) Versuche des Verfassers mit Blei.

Cylinder aus einem und demselben Gussbleikörper durch Drehen hergestellt.

No.	Höhe cm	Durchmesser cm	Querschnitt qcm	Spec. Gewicht	Belastung in kg/qcm, bei welcher das Material noch nicht ausweicht	Belastung in kg/qcm, bei welcher das Material ausweicht, d. h. seitlich abfliesst
1	7,05	3,525	9,76	11,37	46	51
2	3,47	3,53	9,79	11,36	59	69
3	1,01	3,48	9,51	11,35	105	126

Hiernach steigt bei nahezu gleichem Durchmesser die Belastung, welche das Blei erträgt, ohne nach der Seite auszuweichen, von 46 kg auf 105 kg, wenn die Höhe des Cylinders von 7,05 cm auf 1,01 cm vermindert wird.

Gussblei in Würfeln von rund 8 cm Seitenlänge ertrug Belastungen von 50 kg/qcm; mit 72 kg/qcm belastet, wich dasselbe fortgesetzt, wenn auch sehr langsam aus.

Gussblei in Form von Scheiben, deren Durchmesser 16 cm und deren Stärke 1,5 cm, vertrug eine Belastung von 100 kg/qcm; bei 150 kg/qcm wich das Material sehr langsam nach der Seite aus.

Weichwalzblei in Form von Scheiben verhielt sich nicht wesentlich anders als Gussblei.

Aus den angeführten Zahlen erhellt deutlich die Zunahme der Druckfestigkeit bei Abnahme der Höhe der Bleikörper.

(S. auch Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1885, S. 629 u. f.)

2. Die Belastung trifft unmittelbar nur einen Theil der Querschnittsfläche des Probekörpers.

a) Versuche von Bauschinger.

Mittheilungen u. s. w., 6. Heft, 1876, S. 13 u. f.

D. Würfel mit einer durch Abschrägung der Kanten verkleinerten Stirnfläche.

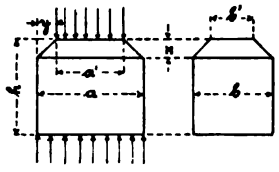


Fig. 29.

Material wie oben unter A bezeichnet.
Druckrichtung senkrecht zum Lager.

Nummer	Höhe	Würfelquerschnitt			Abschrägung	Stirnfläche			Belastung	Druckfestigkeit K in kg/qcm, bezogen auf	
	h	a	b	$a\,b$	$x:y$ abgerundet	a'	b'	$a'\,b'$	P	den Querschnitt $a\,b$ $P:a\,b$	den Querschnitt $a'\,b'$ $P:a'\,b'$
	cm	cm	cm	qcm		cm	cm	qcm	kg		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	9,8	10,1	9,9	100,0	1 : 1	8,0	7,9	63,2	51 000	510	807
2	9,7	9,8	9,9	97,0	2 : 1	7,9	8,0	63,2	45 000	460	712
3	9,7	9,95	9,9	98,5	3 : 1	8,05	8,05	64,8	45 500	460	702
4	9,85	10,0	9,75	97,5	1 : 2	6,2	6,0	37,2	34 500	350	927
5	9,90	10,1	10,05	101,5	2 : 2	6,3	6,25	39,4	35 000	345	888
6	9,80	10,1	9,8	99,0	3 : 2	6,2	6,0	37,2	32 000	325	860
7	9,80	9,9	10,0	99,0	4 : 2	5,9	6,1	36,0	31 500	320	875
8	9,75	10,0	9,8	98,0	1 : 3	4,4	4,2	18,5	23 000	235	1243
9	9,75	9,95	9,9	98,5	2 : 3	4,2	4,2	17,6	20 500	210	1165
10	9,75	10,05	10,0	100,5	3 : 3	4,4	4,2	18,5	23 000	230	1243
11	9,85	10,10	9,75	98,5	5 : 3	4,25	4,1	17,4	19 700	200	1132

Der Bruch erfolgt immer in der Weise, dass von der kleinen Druckfläche aus eine Pyramide in das Innere des Probestückes hineingetrieben und das umliegende Material auseinander gesprengt wurde.

Bei den Versuchen 1 bis 3 war die Stirnfläche von durchschnittlich 98,5 qcm (Spalte 5) vermindert auf im Mittel 63,7 qcm (Spalte 9); die Festigkeit, welche bei Würfelgestalt z. B. nach dem unter 1, b, A, 2 angegebenen Versuch 685 kg (Spalte 6 daselbst) beträgt, sinkt beispielsweise bei Versuch 3 auf 460 kg, sofern sie auf den Querschnitt $a\,b$ bezogen wird, und steigt auf 702 bei Beziehung auf den Querschnitt $a'\,b'$. Hiernach würde sich die Druckfestigkeit eines solchen Körpers (Fig. 29) zu gross ergeben, wenn man, von der an Würfeln ermittelten Festigkeit ausgehend, die Fläche $a\,b$ der Rechnung zu Grunde legt, und zu klein, wenn die Fläche $a'\,b'$ in die Rechnung eingeführt wird. Dieses vorauszusehende Ergebniss tritt um so schärfer hervor, je kleiner die Stirnfläche $a'\,b'$. Für Versuch No. 11 erscheint die aus Versuchen mit Würfeln gewonnene Druckfestigkeit von 685 kg einerseits vermindert auf 200 kg, andererseits vergrössert auf 1132 kg, je nachdem die Bruchbelastung durch $a\,b$ oder $a'\,b'$ dividirt wird.

Der Einfluss des Abschrägungsverhältnisses (Spalte 6) lässt sich zwar deutlich erkennen, wie ein Vergleich der Versuche 1 bis 3, 4 bis 7, 8 bis 11 je unter sich lehrt, ist jedoch nicht sehr bedeutend.

E. Würfel aus dem unter A genannten Material.

Der Druck wird durch Stahlprismen, deren Achsen mit denjenigen der Würfel zusammenfallen und deren Kanten den Würfelkanten parallel laufen, nur auf einen Theil der Stirnfläche übertragen.

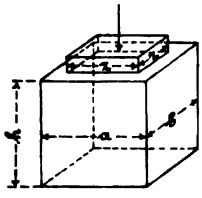


Fig. 30.

Stahlprisma (von 39 mm Höhe) nur auf einer Seite.

No.	Höhe	Würfelquerschnitt			Stahlprisma		Bruchbelastung	Druckfestigkeit in kg/qcm	
	h	a	b	ab	z	z^2	P	$P:ab$	$P:z^2$
	cm	cm	cm	qcm	cm	qcm	kg	kg	kg
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	9,65	10,0	9,9	99,0	3,9	15,21	16000	162	1052
2	9,70	9,85	9,9	97,5	5,7	32,49	30000	308	923
3	9,75	10,0	9,85	98,5	7,8	60,84	47000	477	772

Der Bruch erfolgt auch hier wieder in der Weise, dass von der Stirnfläche des Stahlprisma aus eine Pyramide in das Innere des Prisma getrieben und das umliegende Material auseinander gesprengt wurde.

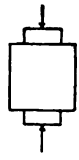


Fig. 31.

Stahlprismen auf beiden Stirnflächen.

No.	Höhe	Würfelquerschnitt			Stahlprisma		Bruchbelastung	Druckfestigkeit in kg/qcm	
	h	a	b	ab	z	z^2	P	$P:ab$	$P:z^2$
	cm	cm	cm	qcm	cm	qcm	kg	kg	kg
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	9,7	9,9	10,0	99,0	5,7	32,49	16000	162	492
2	9,75	9,65	9,9	95,5	7,8	60,84	36000	377	592

Wie ersichtlich, ist die Bruchbelastung weit kleiner, wenn der Druck auf beiden Stirnflächen durch die Stahlprismen wirkt.

Diese Ergebnisse sind in folgender Beziehung noch besonders bemerkenswerth. Wird nach Gl. 26

$$K = \left(310 + 346\,\frac{\sqrt{f}}{h}\right)\sqrt{\frac{\sqrt{f}}{\frac{u}{4}}}$$

für ein quadratisches Prisma berechnet, dessen Querschnitt gleich dem der Stahlprismen und dessen Höhe gleich der Würfelhöhe ist, d. h., da dann $\sqrt{f} = z$ und $u = 4z$

$$K = 310 + 346 \frac{\sqrt{f}}{h},$$

so ergiebt sich

für Versuch 1 $\quad K = 310 + 346 \frac{5{,}7}{9{,}7} = 513,$

„ „ 2 $\quad K = 310 + 346 \frac{7{,}8}{9{,}75} = 587.$

Diese Werthe unterscheiden sich von den beobachteten Grössen 492, bzw. 592 nur um wenig. Hiernach hätte also das Material, welches dasjenige Prisma umschliesst, das im Innern des geprüften Würfels erhalten wird, wenn man sich die Seitenflächen der aufgesetzten Stahlprismen fortgesetzt denkt, keinen merkbaren Einfluss auf die Druckfestigkeit. Dieses auffallende Ergebniss, welches Bauschinger auch durch Versuche mit Granit angenähert bestätigt fand, dürfte sich durch die verhältnissmässig geringe Zugfestigkeit des Materials erklären lassen. Mit demselben steht in Uebereinstimmung, dass unter D die Zunahme des Werthes x in dem Abschrägungsverhältniss $x : y$ (Spalte 6) bei gleichbleibender Grösse von y nur einen untergeordneten Einfluss besitzt. Bei den Versuchen No. 8 bis 11 daselbst wächst x von ungefähr 1 bis 5 cm; die Druckfestigkeit ändert sich hierbei nur unbedeutend.

F. Wird die eine Stirnfläche des Würfels (hier die untere) vollständig, dagegen die andere nur über eine kleinere, im Allgemeinen

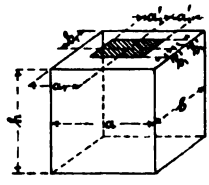


Fig. 32.

einseitig gelegene Fläche, welche in Fig. 32 durch Strichlage hervorgehoben ist, belastet, so gilt nach Bauschinger — zunächst immer nur für Sandstein —

$$K = K_0 \sqrt[3]{\frac{a_1 b_1}{a'_1 b'_1}}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad 31)$$

Hierin bedeutet:

K die Druckfestigkeit bei Belastung des Würfels in der schraffirten Fläche, bezogen auf die Flächeneinheit der letzteren,

K_0 die Druckfestigkeit für den Fall, dass die Belastung über die ganze Stirnfläche gleichmässig vertheilt ist.

b) Versuche des Verfassers.

Material: Sandstein.

Druckrichtung senkrecht zum Lager.

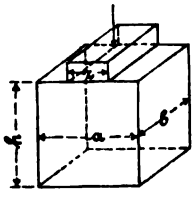


Fig. 33.

Stahlprisma nur auf einer Seite.

Versuchsreihe (je 3 bis 5 Körper)	1	2	3	4	5	6	
Seite a durchschnittlich	6,46	10,04	10,01	10,02	9,99	9,96	cm
„ b „	6,03	9,99	10,01	10,03	9,95	10,02	cm
Höhe h „	6,00	9,89	9,85	9,82	9,84	9,84	„
Breite z des Prisma	6,03	2,5	2,0	1,5	1,0	0,5	„
Bruchbelastung auf 1 qcm des Querschnittes $a\,b$	653	232	188	156	120	102	kg
Bruchbelastung auf 1 qcm des Querschnittes $b\,z$	653	926	943	1044	1193	2050	„

§ 14. Hinderung der Querdehnung.

Wie wir in § 11 sahen, wird der Widerstand, welchen ein auf Druck in Anspruch genommener Körper leistet, schliesslich dadurch überwunden, dass das Material nach der Seite hin ausweicht. Daraus folgt, dass der Widerstand an sich unüberwindbar erscheint,

wenn das Material gehindert wird, nach der Seite auszuweichen, d. h. wenn genügend grosse Druckkräfte auf die Mantelflächen wirken.

Dieser Satz gilt nicht blos für feste, sondern auch für flüssige Körper. Denken wir uns beispielsweise einen genügend festen Hohlcylinder, zum Theil gefüllt mit Wasser, auf dem ein gegen die Cylinderwandung vollkommen abdichtender Kolben ruht. Wie stark wir auch — innerhalb der Widerstandsfähigkeit des Hohlcylinders — den Kolben belasten, das nach allen Seiten hin am Entweichen gehinderte Wasser trägt die Belastung, weist also trotz seiner tropfbar flüssigen Natur unter diesen Umständen eine grosse Widerstandsfähigkeit gegen Druck auf.

Die Erscheinung ist eine ähnliche, wie die in § 7 erörterte. Dort handelt es sich um den Einfluss gehinderter Zusammenziehung, hier um denjenigen der Hinderung der Querdehnung, welche die Druckkraft zur Folge haben würde, wenn Kräfte auf die Mantelfläche senkrecht zur Achse nicht thätig wären. Die in § 7 enthaltenen Gleichungen gelten in sinngemässer Weise auch hier. Insbesondere folgt daraus, dass die Beziehung

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha} \text{ oder } \varepsilon = \alpha\,\sigma,$$

welche bei dem nur in Richtung der Achse gedrückten Stab zwischen der Spannung $-\sigma$ (Pressung) und der Dehnung $-\varepsilon$ (Kürzung), sowie dem Dehnungskoefficienten α gegenüber Druckbeanspruchung besteht, nicht mehr giltig ist, sobald auch Kräfte senkrecht zur Stabachse angreifen[1]). Solche Kräfte wirken bei den

[1]) Damit hängt es dann auch zusammen, dass die zulässige Druckanstrengung im Falle gehinderter Querdehnung grösser genommen werden darf. Die in Fig. 34 auf Druck beanspruchte Bleischeibe vom Durchmesser $d = 35$ mm und der Höhe $h = 10$ mm würde nach den Versuchen § 13 Ziff. 1 c eine Belastung von

Fig. 34.

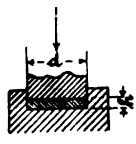


Fig. 35.

125 kg/qcm nicht mehr vertragen. Dieselbe Bleischeibe, nach Fig. 35 vertieft eingelegt, sodass das Blei nach der Seite nicht ausweichen kann, verträgt die doppelte Belastung und mehr.

Versuchskörpern in der Regel auf die Stirnflächen; sie rühren hier her von der Reibung, welche bei der Pressung zwischen Druckplatte der Prüfungsmaschine und Stirnfläche des Probekörpers durch das Bestreben des letzteren, sich quer auszudehnen, wachgerufen wird. In Folge dieser Reibung, welche die volle Reinheit der Erscheinung der Druckelasticität und Druckfestigkeit mehr oder weniger beeinträchtigen muss[1]), beträgt die Querdehnung in der Mitte des Probekörpers mehr als an den Stirnflächen, wie die Fig. 24 bis 27 deutlich erkennen lassen.

Ist ε die durch eine Druckkraft in Richtung der Stabachse veranlasste Zusammendrückung für die Länge 1, so wird die hiermit verknüpfte Querdehnung ε_q nach allen zur Achse senkrechten Richtungen als gleichgross angesehen und bezogen auf den Längeninhalt, gemessen durch

$$\varepsilon_q = \frac{\varepsilon}{m} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 32)$$

Für ein und dasselbe Material pflegt man die Grösse m in Gl. 12 und 32 als gleich zu betrachten, also das Verhältniss der Dehnung (in Richtung der Stabachse) zur Zusammenziehung (senkrecht zur Achse) bei Zugbeanspruchung gleich zu setzen dem Verhältniss der verhältnissmässigen Zusammendrückung zur Querdehnung bei Druckbeanspruchung.

(Vergl. § 7.)

§ 15. Theorien der Druckfestigkeit.

Ueber den Vorgang des Zerdrückens sind zwei Hauptanschauungen geltend gemacht worden.

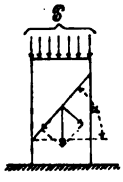


Fig. 36.

Die ältere, von Coulomb herrührende, denkt sich nach Massgabe der Fig. 36 das Zerdrücken durch Abschieben erfolgend und dabei die Druckkraft P in zwei Seitenkräfte

$P \sin \alpha$, wirkend in der Gleitungsebene,

$P \cos \alpha$, senkrecht dazu,

zerlegt. Wird der Widerstand gegen Gleiten für

[1]) Da die Körper, welche Druckversuchen unterworfen werden, verhältnissmässig kurz sind, so wird die Bestimmung der Querdehnung durch unmittelbare Messung derselben (mittelst besonderer Apparate) für die verschiedenen Querschnitte zu verschiedenen Werthen führen können.

das Quadratcentimeter mit K_s (Schubfestigkeit) bezeichnet, so findet sich, sofern f den Querschnitt des Prisma bedeutet:

$$P \sin \alpha = K_s \frac{f}{\cos \alpha}$$

$$\frac{P}{f} = K_s \frac{2}{\sin 2\alpha}.$$

Das Gleiten wird die kleinste Kraft P erfordern, wenn $\sin 2\alpha$ am grössten ausfällt, d. i., wenn $\alpha = 45^0$; womit nach Einführung der Druckfestigkeit

$$K = \frac{P}{f}$$

sich ergiebt

$$K = 2 K_s,$$

d. h. die Druckfestigkeit müsste gleich dem Doppelten der Schubfestigkeit sein.

Diese Theorie wurde später durch Hereinziehung der von $P \cos \alpha$ veranlassten Reibung ergänzt.

Die zweite Anschauung fasst die Querdehnung ins Auge (§ 11) und nimmt an, dass das Zerdrücken stattfinde, wenn dieselbe so gross geworden, wie die Längsdehnung beim Zerreissen im Falle von Zugbeanspruchung. Mit der Genauigkeit, mit welcher die Längsdehnung drei- bis viermal so gross angenommen werden darf, wie die Querdehnung, findet sich auf diesem Wege die Druckfestigkeit gleich dem Drei- bis Vierfachen der Zugfestigkeit, was beispielsweise für das Gusseisen § 13, Ziff. 1a, mit Annäherung zutreffen würde.

Beide Lehren haben durch Druckversuche nicht die erforderliche Bestätigung erfahren.

Eine befriedigende Theorie der Druckfestigkeit würde diese jedenfalls als Funktion der Höhe geben müssen (§ 13), und wenn sie vollkommen sein soll, auch den Fall der Knickung (§ 23) einzuschliessen haben.

III. Biegung.

Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden Kräfte treffen dessen Achse rechtwinklig und geben für jeden Querschnitt ein Kräftepaar, dessen Ebene senkrecht auf demselben steht.

§ 16. Gleichungen der Biegungsanstrengung und der elastischen Linie unter der Voraussetzung, dass die Ebene des Kräftepaares den Querschnitt in einer der beiden Hauptachsen schneidet.

Bei der Entwicklung dieser Beziehungen pflegt man von der durch Fig. 37 dargestellten Sachlage auszugehen: Der bei A als eingespannt vorausgesetzte Balken AB ist am freien Ende B durch

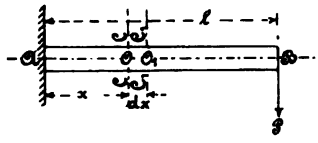


Fig. 37.

die Kraft P belastet, hinsichtlich welcher angenommen wird, dass sie in die Richtung der einen Hauptachse des Stabquerschnittes falle. (Ueber das Kennzeichen der beiden Hauptachsen eines Querschnittes vergl. § 21, Ziff. 1.) Die Kraft P ergiebt dann für den beliebigen, um x von A abstehenden Querschnitt CC ein Kräftepaar, dessen Moment $P(l - x)$ ist und dessen Ebene den Querschnitt senkrecht schneidet, sowie eine in die Querschnittsebene fallende Kraft P. Die Letztere wird als nicht vorhanden angesehen und damit die oben als Voraussetzung der einfachen Biegung hingestellte Bedingung, dass sich die äusseren Kräfte für jeden Querschnitt durch ein Kräftepaar ersetzen lassen, dessen Ebene den letzteren rechtwinklig schneidet, erfüllt.

Es bezeichne mit Bezugnahme auf die Fig. 37 bis 40

M_b das Moment des biegenden Kräftepaares hinsichtlich des in Betracht gezogenen Querschnittes,

η den Abstand eines Flächenstreifens $df = z d\eta$ im letzteren von derjenigen Hauptachse, welche senkrecht zur Ebene des Kräftepaares steht, d. i. hier OO (Fig. 40),

$\Theta = \int \eta^2 df = \int \eta^2 z d\eta$ das Trägheitsmoment des Querschnittes hinsichtlich dieser Hauptachse,

e_1 den grössten positiven Werth von η (Abstand der am stärksten gezogenen oder gespannten Faser),

e_2 den grössten negativen Werth von η (Abstand der am stärksten gedrückten Faser),

$e = e_1 = e_2$, sofern der Querschnitt so beschaffen ist, dass beide Abstände gleich gross sind,

σ die durch M_b im Abstand η, d. h. im Flächenstreifen $df = z d\eta$ hervorgerufene Spannung,

k_z bzw. k die zulässige Anstrengung des Materials auf Zug bzw. Druck,

x und y die Koordinaten des beliebigen Punktes O der elastischen Linie, d. h. der Kurve, in welche die ursprünglich gerade Stabachse bei der Biegung übergeht, bezogen auf das aus Fig. 38 ersichtliche Koordinatensystem,

ϱ den Krümmungshalbmesser der elastischen Linie in dem beliebigen Punkte O,

α den Dehnungskoefficienten, d. i. die Aenderung der Längeneinheit für das Kilogramm Spannung.

Unter der Einwirkung der Kraft P biegt sich der Stab, wie Fig. 38 erkennen lässt. Infolge dessen werden zwei ursprünglich parallele, um $dx = \overline{OO_1}$ von einander abstehende Querschnitte CC

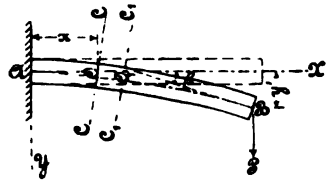


Fig. 38.

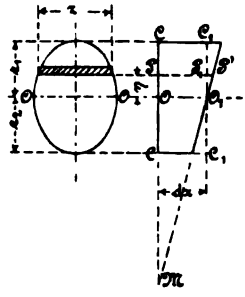


Fig. 40. Fig. 39.

und C_1C_1, Fig. 37, Fig. 39, diesen Parallelismus verloren haben und einen gewissen Winkel OMO_1 mit einander einschliessen. Dass

sie eben und senkrecht zur Mittellinie bleiben, wird vorausgesetzt. Die oberhalb einer gewissen Faserschicht, welche sich in $\overline{OO_1}$ darstellt, liegenden Fasern haben sich gedehnt, die unterhalb gelegenen verkürzt. Ist ϱ der Abstand des Punktes M, in welchem sich die Durchschnittslinie der beiden Querschnitte projicirt, von dem Punkt O, also der Krümmungshalbmesser der jetzt gekrümmten Stabachse, d. h. der elastischen Linie im Punkte O, so findet sich für den in Betracht gezogenen Querschnitt COC die verhältnissmässige Dehnung ε im Abstand η von der Geraden OO (Fig. 40) aus der Erwägung, dass die Strecke $\overline{PP_1} = \overline{CC_1} = \overline{OO_1} = dx$ infolge der Biegung übergegangen ist in $\overline{PP'}$, also

$$\varepsilon = \frac{\overline{PP'} - \overline{PP_1}}{\overline{PP_1}} = \frac{\overline{PP'}}{\overline{OO_1}} - 1 = \frac{\varrho + \eta}{\varrho} - 1 = \frac{\eta}{\varrho}. \quad 33)$$

Die hiermit verknüpfte Spannung σ ergiebt sich unmittelbar aus dem Begriff des Dehnungskoefficienten α zu

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\frac{\eta}{\varrho}, \quad \ldots\ldots\ldots 34)$$

sofern Kräfte senkrecht zur Stabachse auf die Faserschicht nicht einwirken (vgl. § 7 und § 14).

Die so im Inneren des Stabes durch das Moment M_b wachgerufenen Kräfte müssen sich mit diesem im Gleichgewicht befinden. Dazu gehört, dass die algebraische Summe dieser inneren Kräfte in Richtung der Stabachse gleich Null, und dass sie ein Moment liefern, welches gleich und entgegengesetzt M_b ist.

Die erste Forderung giebt, wenn der im Abstande η liegende und in Fig. 40 durch Strichlage hervorgehobene Flächenstreifen von der Breite z und der Höhe $d\eta$ mit df bezeichnet wird,

$$\int \sigma\, df = 0, \quad \ldots\ldots\ldots 35)$$

genommen über den ganzen Querschnitt. Mit Rücksicht auf Gl. 34, sowie in Anbetracht, dass ϱ für sämmtliche Streifen eines und desselben Querschnittes den gleichen Werth besitzt, findet sich aus Gl. 35

$$\int \frac{1}{\alpha}\eta\, df = 0. \quad \ldots\ldots\ldots 36)$$

Unter der Voraussetzung, dass der Dehnungskoefficient α für alle Punkte des Querschnittes gleich gross, also unabhängig von der Grösse und dem Vorzeichen der Spannung σ oder der Dehnung ε ist, folgt

$$\int \eta df = 0, \quad \ldots \ldots \quad 37)$$

d. h. die Gerade, in welcher die Dehnungen und die Spannungen den Werth Null besitzen, die sogenannte „neutrale Achse“ oder „Nullachse“, geht durch den Schwerpunkt des Querschnittes und ist, da die Ebene der äusseren Kräfte den letzteren in der einen Hauptachse schneidet, die andere Hauptachse desselben.

Die zweite Bedingung liefert

$$\int \sigma df \,.\, \eta = M_b \quad \ldots \ldots \quad 38)$$

und nach Massgabe der Gleichung 34 unter der unmittelbar vorher bezüglich α ausgesprochenen Voraussetzung

$$M_b = \frac{1}{\alpha \varrho} \int \eta^2 df,$$

woraus mit

$$\int \eta^2 df = \Theta, \quad \ldots \ldots \quad 39)$$

d. i. das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf OO,

$$\left.\begin{aligned} M_b &= \frac{\Theta}{\alpha \varrho}, \\ \frac{1}{\varrho} &= \alpha \frac{M_b}{\Theta}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 40)$$

Der reciproke Werth des Krümmungshalbmessers, d. h. die Krümmung, ist hiernach proportional dem Dehnungskoefficienten α, dem biegenden Moment M_b und umgekehrt proportional dem Trägheitsmoment Θ.

Mit der Annäherung, mit welcher der allgemein giltige Ausdruck

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\pm \frac{d^2 y}{dx^2}} = \varrho$$

ersetzt werden darf durch

$$\frac{1}{\varrho} = \pm \frac{d^2 y}{d x^2},$$

findet sich

$$M_b = \pm \frac{\Theta}{\alpha} \frac{d^2 y}{d x^2}. \quad \ldots \ldots \quad 41)$$

Der Ersatz von $\frac{1}{\varrho}$ in Gl. 34 durch die rechte Seite der zweiten der Gleichungen 40 führt zu

$$\sigma = \frac{M_b}{\Theta} \eta. \quad \ldots \ldots \quad 42)$$

Hiernach sind die Spannungen proportional dem Abstande der Flächenelemente von der Nullachse, wie in Fig. 41 dargestellt ist.

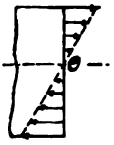


Fig. 41.

Damit ergiebt sich die grösste Zugspannung σ_1 für den grössten positiven Werth von η, d. i. für $\eta = + e_1$, zu

$$\sigma_1 = \frac{M_b}{\Theta} e_1, \quad \ldots \ldots \quad 43)$$

die grösste Druckspannung σ_2 für den grössten negativen Werth von η, d. i. für $\eta = - e_2$, zu

$$\sigma_2 = - \frac{M_b}{\Theta} e_2, \quad \ldots \ldots \quad 44)$$

so dass

$$\left.\begin{array}{ll} k_z \geqq \dfrac{M_b}{\Theta} e_1 & k \geqq \dfrac{M_b}{\Theta} e_2, \\ \text{oder} & \\ M_b \leqq k_z \dfrac{\Theta}{e_1} & M_b \leqq k \dfrac{\Theta}{e_2}. \end{array}\right| \quad \ldots \quad 45)$$

§ 17. Trägheitsmomente.

Die in § 16 entwickelten Hauptgleichungen setzen im Falle ihrer Benutzung die Kenntniss des betreffenden Trägheitsmomentes voraus. Hinsichtlich der Berechnung desselben sei Folgendes bemerkt.

Ist

Θ das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die Schwerpunktsachse $O\,O$, Fig. 42, also $\Theta = \int \eta^2 df = \int \eta^2 z\, d\eta$,

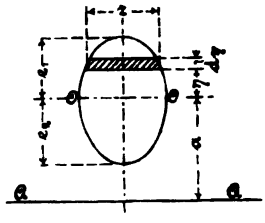


Fig. 42.

Θ_1 das Trägheitsmoment desselben Querschnittes in Bezug auf die Achse $Q\,Q$, welche im Abstande a zu $O\,O$ parallel läuft, demnach $\Theta_1 = \int (\eta + a)^2 df$,

f die Grösse des Querschnittes,

so ergiebt sich

$$\Theta_1 = \int (\eta + a)^2 df = \int \eta^2 df + 2a \int \eta\, df + a^2 \int df$$

und unter Beachtung, dass

$$\int \eta^2 df = \Theta \qquad \int \eta\, df = 0 \qquad \int df = f$$

$$\Theta_1 = \Theta + a^2 f. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 46)$$

Von diesem Hilfssatz, der ausspricht, dass das Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse $Q\,Q$ gleich ist dem Trägheitsmoment hinsichtlich der zu $Q\,Q$ parallelen Schwerpunktsachse $O\,O$, vermehrt um das Produkt aus Querschnittsfläche und Quadrat des Abstandes der beiden Achsen, lässt sich oft mit Vortheil Gebrauch machen.

1. Rechteck, Fig. 43.

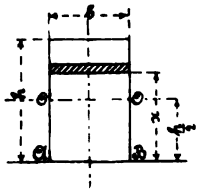


Fig. 43.

Das Trägheitsmoment in Bezug auf die Seite AB beträgt

$$\Theta_1 = \int_0^h x^2 b\, dx = \frac{1}{3} b h^3,$$

folglich in Bezug auf die um $\frac{h}{2}$ davon abstehende Schwerpunktsachse $O\,O$

$$\Theta = \Theta_1 - a^2 f = \frac{1}{3} b h^3 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 b h = \frac{1}{12} b h^3 \quad . \quad . \quad 47)$$

und

$$\frac{\Theta}{e} = \frac{\Theta}{\frac{h}{2}} = \frac{1}{6} b h^2.$$

2. Dreieck, Fig. 44.

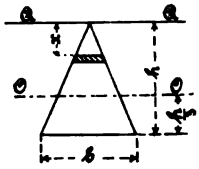


Fig. 44.

Für die Achse $Q\,Q$

$$\Theta_1 = \int_0^h x^2 \left(b \frac{x}{h}\right) dx = \frac{1}{4} b h^3.$$

Für die um $\frac{2}{3}h$ davon abstehende Schwerpunktsachse $O\,O$

$$\Theta = \frac{1}{4}bh^3 - \left(\frac{2}{3}h\right)^2 \cdot \frac{1}{2}bh = \frac{1}{36}bh^3. \quad . \quad . \quad . \quad 48)$$

3. Kreis, Fig. 45.

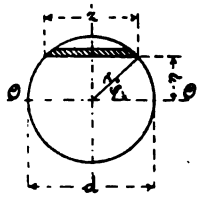


Fig. 45.

Für die Schwerpunktsachse $O\,O$ wegen $\eta = r\sin\varphi$, $z = 2r\cos\varphi$

$$\Theta = \int_{-r}^{+r} \eta^2 z\, d\eta = 4r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{4}r^4$$

$$\Theta = \frac{\pi}{64}d^4. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 49)$$

$$\frac{\Theta}{e} = \frac{\Theta}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi}{32}d^3 = \sim\frac{1}{10}d^3.$$

4. Ellipse, Fig. 46.

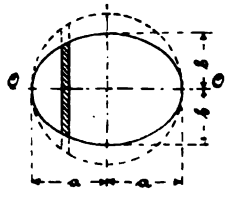


Fig. 46

Wir denken uns die Ellipse in Verbindung gebracht mit dem sie umschliessenden Kreis vom Radius a und beide Querschnitte

in unendlich schmale Streifen senkrecht zur Achse OO geschnitten. Das Trägheitsmoment eines jeden Kreisstreifens verhält sich nach Gl. 47 zu demjenigen des Ellipsenstreifens, wie

$$1 : \left(\frac{b}{a}\right)^3.$$

Folglich ergiebt sich das auf OO bezogene Trägheitsmoment der Ellipse nach Gl. 49 zu

$$\Theta = \frac{\pi}{64}(2a)^4\left(\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{\pi}{4}a\,b^3. \quad \ldots \quad 50)$$

5. Zusammengesetzte Querschnitte.

a) Rechnerische Bestimmung, Fig. 47.

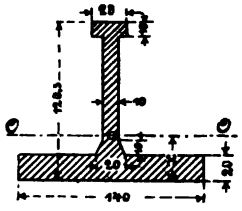


Fig. 47.

Der Querschnitt kann zusammengesetzt gedacht werden aus

dem liegenden Rechteck $14 \cdot 2 = 28$ qcm,
„ Dreieck $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0{,}5$ qcm,
„ stehenden Rechteck $1 \cdot (12{,}05 - 2 - 1) = 9{,}05$ qcm,
„ liegenden Rechteck $2{,}8 \cdot 1 = 2{,}8$ qcm.

Die Lage der Schwerpunktsachse OO bestimmt sich aus

$$x = \frac{28\frac{2}{2} + 0{,}5\left(2 + \frac{1}{3}\right) + 9{,}05 \cdot (2 + 9{,}05 \cdot 0{,}5) + 2{,}8 \cdot (12{,}05 - 0{,}5)}{28 + 0{,}5 + 9{,}05 + 2{,}8} = 2{,}99 \text{ cm}$$

und das Trägheitsmoment in Bezug auf diese Achse nach Massgabe der Gleichungen 47, 48 und 46 zu

$$\Theta = \frac{1}{12}14{,}0 \cdot 2{,}0^3 + 14 \cdot 2\ (2{,}99 - 1)^2$$

$$+ \frac{1}{36}1 \cdot 1^3 + \frac{1}{2}1 \cdot 1\,(2{,}99 - 2{,}33)^2$$

$$+ \frac{1}{12}1 \cdot 9{,}05^3 + 1 \cdot 9{,}05\ (6{,}025 - 2{,}99)^2$$

$$+ \frac{1}{12}2{,}8 \cdot 1^3 + 2{,}8 \cdot 1\,(11{,}55 - 2{,}99)^2 = 500{,}7\ \text{cm}^4.$$

b) Zeichnerische Bestimmung, Fig. 48 bis 50.

Bei zusammengesetzten, insbesondere unregelmässig begrenzten Querschnitten pflegt das folgende, von Mohr angegebene zeichnerische Verfahren rascher zum Ziele zu führen, als der Weg der Rechnung.

Fig. 48.

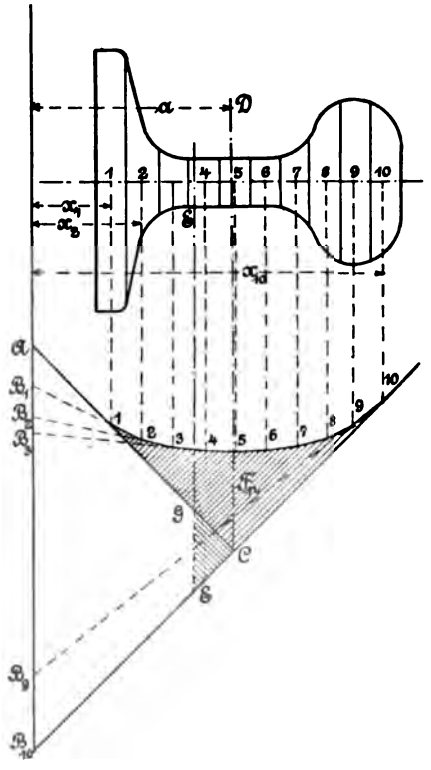


Fig. 49.

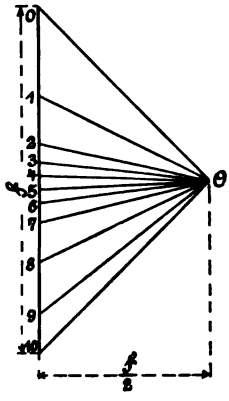


Fig. 50.

Die Querschnittsfläche von der Grösse f (im Falle des gewählten Beispiels Querschnitt einer Eisenbahnschiene) wird parallel zur Achse, in Bezug auf welche das Trägheitsmoment gesucht werden soll, in eine Anzahl Streifen zerlegt; hierauf trägt man die Querschnitte $f_1 f_2 f_3 \ldots . f_{10}$ dieser Streifen als Strecken $f_1 = \overline{01}$, $f_2 = \overline{1\,2}$, $f_3 = \overline{2\,3} \ldots . f_{10} = \overline{9\,10}$ auf einer zur genannten Achse parallelen Geraden auf (Fig. 49) und stellt sich diese Flächen als Schwerkräfte vor, welche in den Schwerpunkten der Streifen angreifen; konstruirt mit dem symmetrisch zu 0 10 gelegenen und von dieser Linie um $\frac{f}{2}$ abstehenden Punkt O als Pol Kräfte- und Seilpolygon, Fig. 49, bzw. Fig. 50. In dem Schnittpunkt C (Fig. 50) der äussersten Polygonseiten $1\,C$ und $10\,C$ wird alsdann — wie ohne Weiteres aus der Natur des Seilpolygons folgt — ein Punkt der gesuchten Schwerlinie $C\,D$ erhalten, während die von dem Seilpolygon 1 2 3 . . . . 10 und den beiden Polygonseiten $1\,C$ und $10\,C$ eingeschlossene Fläche F_p (in Fig. 50 durch Strichlage, von links nach rechts ansteigend, bezeichnet) mit f multiplicirt das Trägheitsmoment bezüglich der Schwerachse $C\,D$ liefert.

Beweis:

Auf den Knotenpunkt 1 des Seilpolygons, welchen wir uns herausgeschnitten denken, wirken in der Richtung $C\,1$ die Kraft S_0, in der Richtung 1 2 die Kraft S_1 und senkrecht abwärts die Schwerkraft f_1. Dieselben ergeben in Bezug auf den Durchschnittspunkt A der Geraden $C\,1$ mit der beliebigen, zur Richtung der Streifen und der Schwerpunktsachse $C\,D$ parallel laufenden Achse $\overline{AB}_{10}$ die Momentengleichung

$$f_1 x_1 = H . \overline{AB}_1,$$

sofern S_1 in der eigenen Richtungslinie nach B_1 verlegt und hier in seine Vertikalkomponente und in seine wagrechte Seitenkraft

$$H = \frac{f}{2}$$

zerlegt wird.

Durch Multiplikation mit x_1 findet sich

$$f_1 x_1^2 = 2\,H \frac{\overline{AB}_1 . x_1}{2} = 2\,H . \text{Fläche } A\,1\,B_1 = f . \text{Fläche } A\,1\,B_1.$$

In ganz gleicher Weise folgt für den Knotenpunkt 2

$$f_2 x_2^2 = f \cdot \text{Fläche } B_1\, 2\, B_2,$$

für die folgenden Knotenpunkte

$$f_3 x_3^2 = f \cdot \text{Fläche } B_2\, 3\, B_3,$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f_{10} x_{10}^2 = f \cdot \text{Fläche } B_9\, 10\, B_{10}.$$

Nun ist das Trägheitsmoment Θ_1 des ganzen Querschnitts in Bezug auf die Achse $A\,B_{10}$ — streng genommen allerdings nur unter Voraussetzung unendlich schmaler Streifen —

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= f_1 x_1^2 + f_2 x_2^2 + f_3 x_3^2 + \ldots + f_{10} x_{10}^2 \\ &= f \cdot (\text{Fläche } A\,1\,B_1 + \text{Fläche } B_1\,2\,B_2 + \text{Fläche } B_2\,3\,B_3 + \ldots \\ &\quad + \text{Fläche } B_9\,10\,B_{10}) \\ &= f \cdot \text{Fläche } A\,1\,5\,10\,C\,B_{10}\end{aligned}$$

und in Hinsicht auf die Schwerpunktsachse $\overline{CD}$ nach Gleichung 46

$$\Theta = \Theta_1 - f a^2.$$

Unter Beachtung, dass Fläche $A\,C\,B_{10} = a^2$ (wegen $\sphericalangle\, ACB_{10} = 90^0$) wird

$$\begin{aligned}\Theta &= f \cdot (\text{Fläche } A\,1\,5\,10\,CB_{10} - \text{Fläche } ACB_{10}) \\ &= f \cdot \text{Fläche } 1\,5\,10\,C = f \cdot F_p,\end{aligned}$$

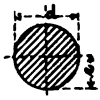
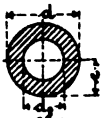
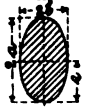
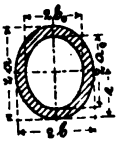
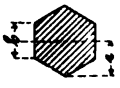
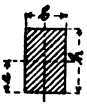
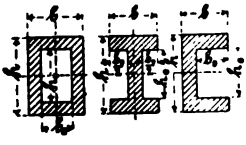
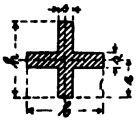
wie das Mohr'sche Verfahren voraussetzt.

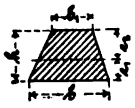
Für die Achse $EE \parallel CD$ ist, wie nach Massgabe des Erörterten ohne Weiteres klar, das Trägheitsmoment

$$f \cdot (F_p + \text{Fläche } CEG),$$

d. h. gleich dem Produkt aus Stabquerschnitt und der Summe der beiden in Fig. 50 durch Strichlage hervorgehobenen Flächen.

6. Zusammenstellung.

Querschnittsform	Trägheitsmoment Θ	Schwerpunktsabstand	Grösse des Querschnittes f
	$\frac{\pi}{64} d^4$	$e = \frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{4} d^2$
	$\frac{\pi}{64}(d^4 - d_0^4)$	$e = \frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{4}(d^2 - d_0^2)$
	$\frac{\pi}{4} a^3 b$	$e = a$	$\pi a b$
	$\frac{\pi}{4}(a^3 b - a_0^3 b_0)$	$e = a$	$\pi(a b - a_0 b_0)$
	$\frac{5\sqrt{3}}{16} b^4 = 0{,}54\, b^4$	$e = 0{,}866\, b$	$\frac{3\sqrt{3}}{2} b^2 = 2{,}6\, b^2$
	$0{,}54\, b^4$	$e = b$	$2{,}6\, b^2$
	$\frac{1}{12} b h^3$	$e = \frac{h}{2}$	$b h$
	$\frac{1}{12}(b h^3 - b_0 h_0^3)$	$e = \frac{h}{2}$	$b h - b_0 h_0$
	$\frac{1}{12}[h^3 s + (b - s) s^3]$	$e = \frac{h}{2}$	$h s + (b - s) s$

Querschnittsform	Trägheitsmoment Θ	Schwerpunktsabstand	Grösse des Querschnittes f
	$\frac{1}{36} b h^3$	$e_1 = \frac{h}{3}$ $e_2 = \frac{2}{3} h$	$\frac{1}{2} b h$
	$\frac{1}{36} \frac{b^2+4bb_1+b_1^2}{b+b_1} h^3$	$e_1 = \frac{b+2b_1}{b+b_1} \frac{h}{3}$ $e_2 = \frac{2b+b_1}{b+b_1} \frac{h}{3}$	$\frac{b+b_1}{2} h$
	$0{,}0069\, d^4$	$e_1 = 0{,}212\, d$ $e_2 = 0{,}288\, d$	$\frac{\pi}{8} d^2$

Ueber die beiden Hauptträgheitsmomente eines Querschnittes vergl. § 21, Ziffer 1.

§ 18. Fälle bestimmter Belastungen.

1. Der Stab (vergl. Fig. 37 und 38) ist an dem einen Ende eingespannt, am freien Ende mit P belastet. Ausserdem trägt derselbe eine gleichmässig über seine Länge l vertheilte Belastung $Q = p\,l$.

Für den beliebigen Querschnitt CC, welcher um x von der Einspannstelle absteht, ergiebt sich

$$M_b = P(l-x) + p\frac{(l-x)^2}{2}.$$

Den grössten Werth erlangt M_b für $x = 0$, nämlich

$$\max(M_b) = P\,l + \frac{p\,l^2}{2} = \left(P + \frac{Q}{2}\right) l.$$

Demnach findet nach den Gleichungen 45 die stärkste Anstrengung im Querschnitt der Einspannungsstelle A statt.

Zur Feststellung der elastischen Linie ergiebt sich mit Gleichung 41

$$\frac{\Theta}{\alpha}\frac{d^2y}{dx^2} = P(l-x) + p\frac{(l-x)^2}{2}$$

und für Materialien, für welche der Dehnungskoefficient α konstant ist — Gl. 41 gilt zunächst auch nur für solche —, sowie unter der Voraussetzung der Unveränderlichkeit des Trägheitsmomentes Θ

$$\frac{\Theta}{\alpha}\frac{dy}{dx} = P\left(l\,x - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{p}{2}\left(l^2 x - l\,x^2 + \frac{x^3}{3}\right) + C,$$

sofern die Integrationskonstante C genannt wird. Dieselbe bestimmt sich aus folgender Erwägung. Mit der Bezeichnung der Einspannung verknüpft man den Begriff, dass an der Einspannstelle die elastische Linie (in Fig. 38 AOB) von der ursprünglich geraden Stabachse (AX) berührt wird[1]), d. h.

$$\text{für } x = 0 \quad \text{ist} \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

Damit folgt $C = 0$, sodass

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{\Theta}\left[P\left(l - \frac{x}{2}\right) + \frac{p}{2}\left(l^2 - l\,x + \frac{x^2}{3}\right)\right]x \quad . \quad 51)$$

Hieraus lässt sich für jeden beliebigen Punkt der elastischen Linie der Winkel berechnen, welchen die Tangente an letzterer in dem betreffenden Punkt mit der ursprünglich geraden Stabachse einschliesst. Beispielsweise findet sich für das freie Ende B, Fig. 38, dieser Winkel β mit $x = l$ zu

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\alpha}{2\,\Theta}\left(P + \frac{Q}{3}\right)l^2$$

[1]) Ueber die Zulässigkeit dieser nur ausnahmsweise thatsächlich ganz erfüllten Voraussetzung vergleiche § 53.

und angenähert, da es sich nur um sehr kleine Werthe von β zu handeln pflegt,

$$\beta = \frac{\alpha}{2\Theta}\left(P + \frac{Q}{3}\right) l^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 52)$$

Aus Gl. 51 folgt unter Beachtung, dass

$$\text{für } x = 0 \quad \text{auch} \quad y = 0,$$

die Gleichung der elastischen Linie

$$y = \frac{\alpha}{\Theta}\left[\frac{P}{2}\left(l - \frac{x}{3}\right) + \frac{p}{4}\left(l^2 - \frac{2}{3}lx + \frac{x^2}{6}\right)\right] x^2. \quad . \quad 53)$$

Die Durchbiegung y' des freien Endes beträgt, da hierfür $x = l$,

$$y' = \frac{\alpha}{\Theta}\left(\frac{P}{3} + \frac{pl}{8}\right) l^3 = \frac{\alpha}{\Theta}\left(\frac{P}{3} + \frac{Q}{8}\right) l^3. \quad . \quad . \quad 54)$$

2. Der Stab liegt beiderseits auf Stützen, Fig. 51. Er ist belastet durch die gleichmässig über ihn vertheilte Last $Q = p(a+b) = pl$ und durch die im Punkte C angreifende Kraft P.

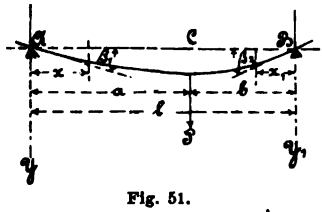


Fig. 51.

Die Auflagerdrücke der Stützen A und B sind

$$A = P\frac{b}{l} + \frac{Q}{2}, \qquad B = P\frac{a}{l} + \frac{Q}{2}.$$

Für den um x vom Auflager A abstehenden Querschnitt ist das biegende Moment

$$M_b = Ax - p\frac{x^2}{2} = \left(P\frac{b}{l} + \frac{Q}{2}\right)x - \frac{px^2}{2}.$$

Dasselbe erlangt innerhalb der Strecke $\overline{AC} = a$ einen grössten Werth für

$$P\frac{b}{l} + \frac{Q}{2} = p\,x$$

$$x = \frac{P}{Q}b + \frac{l}{2},$$

sofern

$$a > \frac{l}{2}.$$

Der gesuchte Querschnitt könnte hiernach nur in der grösseren der beiden Strecken a und b liegen, und zwar zwischen der Balkenmitte und dem Angriffspunkt C der Kraft P, vorausgesetzt, dass

$$\frac{P}{Q}b < a - \frac{l}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{P}{Q} < \frac{2a-l}{2b} = \frac{a-b}{2b}$$

$$p\,a > P\frac{b}{l} + \frac{Q}{2},$$

d. h. dass die über die Strecke a gleichmässig vertheilte Last grösser ist als der Auflagerdruck in A.

Für den Fall, dass

$$\frac{P}{Q} \geq \frac{a-b}{2b},$$

liegt der durch die Biegung am stärksten beanspruchte Querschnitt im Angriffspunkte C der Kraft P.

Demnach ergiebt sich,

wenn $\frac{P}{Q} \geq \frac{a-b}{2b}$, d. i. für den Querschnitt C

$$\max(M_b) = \left(P\frac{b}{l} + \frac{Q}{2}\right)a - \frac{p\,a^2}{2} = \left(P + \frac{Q}{2}\right)\frac{a\,b}{l}; \quad 55)$$

wenn

$$\frac{P}{Q} < \frac{a-b}{2b}, \quad \text{d. i. für } x = \frac{P}{Q}b + \frac{l}{2}$$

$$\max(M_b) = \left(P\frac{b}{l} + \frac{Q}{2}\right)\left(\frac{P}{Q}b + \frac{l}{2}\right) - \frac{p}{2}\left(\frac{P}{Q}b + \frac{l}{2}\right)^2$$

$$= \left(P\frac{b}{l} + \frac{Q}{2}\right)^2 \frac{l}{2Q}. \quad \ldots\ldots \quad 56)$$

Für $Q = 0$ wird

$$\max(M_b) = P\frac{b}{l} \cdot a$$

und wenn

$$a = b = \frac{l}{2}$$

$$\max(M_b) = \frac{Pl}{4}. \quad \ldots\ldots \quad 56a)$$

Für $P = 0$ wird

$$\max(M_b) = \frac{Ql}{8} = \frac{pl^2}{8}. \quad \ldots\ldots \quad 56b)$$

Zur Bestimmung der elastischen Linie innerhalb der Strecke AC ergiebt sich nach Gleichung 41

$$-\frac{\Theta}{\alpha}\frac{d^2y}{dx^2} = Ax - p\frac{x^2}{2}$$

und unter der Voraussetzung der Unveränderlichkeit von α und Θ (vergl. Ziff. 1)

$$-\frac{\Theta}{\alpha}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}Ax^2 - \frac{1}{6}px^3 + C_1$$

$$-\frac{\Theta}{\alpha}y = \frac{1}{6}Ax^3 - \frac{1}{24}px^4 + C_1x + C_2.$$

Wegen

$$y = 0 \quad \text{für } x = 0 \quad \text{wird } C_2 = 0.$$

Für die Strecke BC findet sich entsprechend

$$-\frac{\Theta}{\alpha}\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = Bx_1 - p\frac{x_1^2}{2}$$

$$-\frac{\Theta}{\alpha}\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{1}{2}B x_1^2 - \frac{1}{6}p x_1^3 + C',$$

$$-\frac{\Theta}{\alpha}y_1 = \frac{1}{6}B x_1^3 - \frac{1}{24}p x_1^4 + C' x_1 + C'',$$

$$C'' = 0.$$

Die Senkung im Punkte C muss für beide Strecken gleich erhalten werden, d. h.

$$\frac{1}{6}A a^3 - \frac{1}{24}p a^4 + C_1 a = \frac{1}{6}B b^3 - \frac{1}{24}p b^4 + C' b.$$

Ferner muss der Neigungswinkel der elastischen Linie im Punkte C der Strecke AC gleich dem negativen Werth des Neigungswinkels der elastischen Linie im Punkte C der Strecke BC sein, d. h.

$$\frac{1}{2}A a^2 - \frac{1}{6}p a^3 + C_1 = -\frac{1}{2}B b^2 + \frac{1}{6}p b^3 - C'.$$

Nach Beseitigung von C_1 und C' mittelst der beiden letzten Gleichungen findet sich

für die Strecke AC

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\Theta}{\alpha}\left(\beta_1 - \frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{2}A x^2 - \frac{1}{6}p x^3 \\
&\frac{\Theta}{\alpha}(\beta_1 x - y) = \frac{1}{6}A x^3 - \frac{1}{24}p x^4 \\
&\beta_1 = \left(P\frac{a b (a+2b)}{6 l} + \frac{Q l^2}{24}\right)\frac{\alpha}{\Theta};
\end{aligned}\right\} \quad \text{für die Strecke } BC$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\Theta}{\alpha}\left(\beta_2 - \frac{dy_1}{dx_1}\right) = \frac{1}{2}B x_1^2 - \frac{1}{6}p x_1^3 \\
&\frac{\Theta}{\alpha}(\beta_2 x_1 - y_1) = \frac{1}{6}B x_1^3 - \frac{1}{24}p x_1^4 \\
&\beta_2 = \left(P\frac{a b (2a+b)}{6 l} + \frac{Q l^2}{24}\right)\frac{\alpha}{\Theta}.
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 57)$$

Die Durchbiegung y' im Angriffspunkte C der Kraft P ergiebt sich zu

$$y' = \left(P + \frac{l^2 + ab}{8ab} Q\right) \frac{a^2 b^2}{3l} \frac{\alpha}{\Theta} \quad \ldots \quad 58)$$

Für den Fall, dass

$$a = b = \frac{l}{2},$$

folgt

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta = \left(P + \frac{2}{3} Q\right) \frac{\alpha}{\Theta} \frac{l^2}{16}, \quad \ldots \quad 59)$$

$$y' = \left(P + \frac{5}{8} Q\right) \frac{\alpha}{\Theta} \frac{l^3}{48} \quad \ldots \quad 60)$$

und sofern $Q = 0$

$$\beta = \frac{\alpha}{16} \frac{P l^2}{\Theta}, \quad \ldots \quad 61)$$

$$y' = \frac{\alpha}{48} \frac{P l^2}{\Theta} \quad \ldots \quad 62)$$

3. Der Stab ist beiderseits wagrecht eingespannt, Fig. 52, und belastet durch die gleichmässig über ihn vertheilte Last $Q = p\,l$, sowie durch die in der Mitte l angreifende Kraft P.

Wie bereits unter Ziff. 1 erörtert, wird mit der Bezeichnung der Einspannung der Begriff verknüpft, dass die elastische Linie

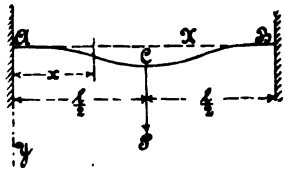


Fig. 52.

an der Einspannstelle die ursprünglich gerade Stabachse zur Tangente hat. Die vorausgesetzte Einspannung in A und B bedingt hiernach, dass die gerade Stabachse AB die elastische Linie ACB

in A und B berührt. In wie weit sich dies thatsächlich erreichen lässt, darüber wird in § 53 das Nöthige erörtert werden. Bemerkt sei jedoch schon hier, dass nur in sehr seltenen Fällen von wirklicher Einspannung in dem bezeichneten Sinne gesprochen werden kann.

Bei der Symmetrie der Belastung genügt es, nur die Hälfte AC des Stabes in Betracht zu ziehen.

An der Einspannstelle A wirken auf den Balken

ein Kräftepaar vom Momente M_A

„ Auflagerdruck $A = \frac{P}{2} + \frac{Q}{2}$.

Für den beliebigen, um x von der Einspannstelle A abstehenden Querschnitt ist das biegende Moment

$$M_b = M_A + Ax - \frac{px^2}{2}.$$

Hiermit liefert die Gl. 41

$$-\frac{\Theta}{\alpha}\frac{d^2y}{dx^2} = M_A + Ax - \frac{px^2}{2},$$

woraus unter Voraussetzung, dass α und Θ unveränderlich sind,

$$-\frac{\Theta}{\alpha}\frac{dy}{dx} = M_A x + \frac{1}{2}Ax^2 - \frac{px^3}{6}.$$

Die Integrationskonstante ist wegen der angenommenen Befestigungsweise der Stabenden, d. h. wegen

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{für } x = 0,$$

ebenfalls gleich Null.

Die unbekannte Grösse des Momentes M_A ergiebt sich durch die Erwägung, dass für

$$x = \frac{l}{2} \qquad \frac{dy}{dx} = 0$$

sein muss, aus der Gleichung

$$0 = M_A\frac{l}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{P}{2} + \frac{Q}{2}\right)\frac{l^2}{4} - p\frac{l^3}{48}$$

zu

$$M_A = -\left(\frac{Pl}{8} + \frac{Ql}{12}\right), \quad \ldots\ldots \quad 63)$$

also links drehend, wie nach der Form der elastischen Linie erwartet werden musste.

Hiermit das biegende Moment im Abstande x von A

$$M_b = -\left(\frac{Pl}{8}+\frac{Ql}{12}\right)+\left(\frac{P}{2}+\frac{Q}{2}\right)x-\frac{px^2}{2}.$$

Für die Stabmitte $x=\frac{l}{2}$ folgt

$$M_b = \frac{Pl}{8}+\frac{Ql}{24}, \quad \ldots\ldots\ 64)$$

d. i. absolut genommen $\frac{Ql}{24}$ weniger, als das Moment an der Einspannstelle M_A.

Da M_b für die Mitte C positiv ist, so muss das Moment für einen Querschnitt zwischen A und C Null sein, entsprechend einem Wendepunkt der elastischen Linie. (In Gl. 40 wird $\varrho=\infty$ für $M_b=0$).

Für den Fall, dass $Q=0$, ergiebt sich das Moment

im Punkte A zu $\quad -\frac{Pl}{8}$,

„ „ C „ $\quad +\frac{Pl}{8}$,

„ Abstande $x=\frac{l}{4}$ (Wendepunkt) $\quad 0$.

Für den Fall, dass $P=0$, wird das Moment

im Punkte A $\quad -\frac{Ql}{12}=-\frac{pl^2}{12}$,

„ „ C $\quad +\frac{Ql}{24}=+\frac{pl^2}{24}$,

„ Abstande $x=0{,}2113\,l$ (Wendepunkt) $\quad 0$.

Die Gleichung der elastischen Linie wird erhalten durch nochmalige Integration des für den ersten Differentialquotienten erlangten Ausdruckes unter Beachtung, dass für $x=0$ auch $y=0$

$$-\frac{\Theta}{\alpha}y=\frac{1}{2}M_A x^2+\frac{1}{6}Ax^3-\frac{px^4}{24}.$$

Hieraus findet sich die grösste Durchbiegung y' für $x=\frac{l}{2}$ zu

$$y'=\left(P+\frac{Q}{2}\right)\frac{\alpha}{\Theta}\frac{l^3}{192}. \quad \ldots\ldots\ 65)$$

§ 19. Körper von gleichem Widerstande.

Körper dieser Art sind so geformt, dass die Belastung in sämmtlichen Querschnitten eines und desselben Körpers die gleiche Grösstspannung hervorruft. Unter Bezugnahme auf die Beziehungen 45 heisst dies, dass für sämmtliche Querschnitte

$$k_z = \frac{M_b}{\frac{\Theta}{e_1}}, \text{ bezw. } k = \frac{M_b}{\frac{\Theta}{e_2}}$$

konstant ist. Daraus folgt, dass die Querschnitte mit M_b sich derart ändern müssen, dass der Quotient

$$M_b : \frac{\Theta}{e_1}, \text{ bezw. } M_b : \frac{\Theta}{e_2}$$

für alle Querschnitte gleich bleibt.

Hiermit führt Gl. 40 zu

$$\frac{1}{\varrho} = \alpha \frac{M_b}{\Theta} = \alpha \frac{M_b}{\frac{\Theta}{e_1}} \frac{1}{e_1} = \alpha \frac{k_z}{e_1},$$

woraus ersichtlich, dass im Falle eines konstanten Abstandes e_1 und bei Unveränderlichkeit von α die elastische Linie zum Kreise wird.

1. Der einerseits eingespannte, andererseits freie Körper mit rechteckigem Querschnitt von konstanter Breite b ist am freien Ende durch P belastet, Fig. 53.

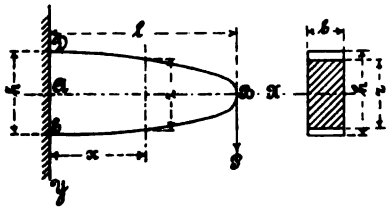


Fig. 53.

Für den um x von A abstehenden Querschnitt beträgt

$$M_b = P(l - x), \quad \Theta = \frac{1}{12} b z^3, \quad e_1 = e_2 = \frac{z}{2}, \quad \frac{\Theta}{e_1} = \frac{1}{6} b z^2.$$

Folglich

$$k_z = \frac{P(l-x)}{\frac{1}{6} b z^2} = \text{konstant},$$

woraus mit $l - x = x_1$

$$z^2 = \frac{6P}{k_z b}(l-x) = \frac{6P}{k_z b} x_1,$$

d. i. die Gleichung einer Parabel. Demnach ist in Fig. 53 die Begrenzung EBD nach einer Parabel zu gestalten, für welche BA die Hauptachse, B der Scheitel und $E(D)$ ein zweiter Punkt ist, dessen Lage bestimmt erscheint durch

$$\overline{AE} = \overline{AD} = \frac{h}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6Pl}{k_z b}}.$$

Die Durchbiegung y' am freien Ende ergiebt sich unter Zugrundelegung des Koordinatensystems xy (vergl. Fig. 38) nach Gl. 40 und 41 unter Beachtung des oben Bemerkten aus

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\alpha k_z}{e_1} = \frac{\alpha k_z}{\frac{z}{2}} = \frac{\alpha k_z}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6P}{k_z b}(l-x)}} = \frac{2\alpha k_z \sqrt{l}}{h\sqrt{l-x}},$$

$$y' = \alpha\left(\frac{16Pl\sqrt{l}}{bh^3}\sqrt{l-x}^3 + \frac{24Pl^2}{bh^3}x - \frac{16Pl^3}{bh^3}\right),$$

sofern α als unveränderlich betrachtet und im Auge behalten wird, dass für

$$x = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = 0 \qquad y = 0,$$

zu

$$y' = \alpha \frac{8Pl^3}{bh^3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 66)$$

Für den gleichbelasteten, jedoch prismatischen Stab ergab Gl. 54

$$y' = \frac{\alpha}{\frac{1}{12}bh^3}\frac{Pl^3}{3} = \alpha\frac{4Pl^3}{bh^3},$$

d. i. genau die Hälfte des Werthes von Gl. 66.

Nach Massgabe der vorstehenden Rechnung würde der Querschnitt im Angriffspunkte der Kraft P gleich Null sein. Dieses natürlich unzulässige Ergebniss ist die Folge der Vernachlässigung der Schubkraft.

Unter „Biegung und Schub“ wird in § 52 das zur Feststellung der Querschnittsabmessungen gegen das Ende des Stabes hin Erforderliche bemerkt werden.

2. Der Stab wie unter 1, jedoch von konstanter Höhe h, Fig. 54.

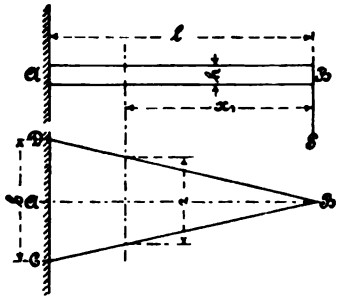


Fig. 54.

Für den um x_1 vom freien Ende B abstehenden Querschnitt ergiebt sich

$$M_b = Px_1, \qquad \Theta = \frac{1}{12}h^3 z, \qquad e_1 = e_2 = \frac{h}{2}, \qquad \frac{\Theta}{e_1} = \frac{1}{6}h^2 z,$$

$$k_z = \frac{Px_1}{\frac{1}{6}h^2 z} = \text{konstant},$$

$$z = \frac{6P}{k_z h^2} x_1,$$

d. h. die Begrenzungslinien BC und BD sind Gerade, deren Lage durch

$$\overline{AC} = \overline{AD} = \frac{b}{2} = \frac{3Pl}{k_z h^2}$$

bestimmt wird.

Die elastische Linie ist nach Massgabe der Gleichung

$$\frac{1}{\varrho} = \alpha \frac{k_z}{e_1} = 2\,\alpha \frac{k_z}{h}$$

infolge der konstanten Höhe des Stabes ein Kreis vom Halbmesser

$$\varrho = \frac{h}{2\,\alpha\, k_z}.$$

Die Durchbiegung y' am freien Ende B wird daher

$$y' = \frac{l^2}{2\varrho} = \alpha\, k_z \frac{l^2}{h} = \alpha \frac{6 P l^3}{b\, h^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 67)$$

d. i. 1,5mal so gross, wie die Durchbiegung (nach Gl. 54) unter sonst gleichen Verhältnissen bei konstanter Breite sein würde.

Vergleiche Schlussbemerkung zu Ziff. 1.

3. Der Stab liegt beiderseits auf Stützen, Fig. 55, und ist durch die im Punkte C angreifende Kraft P belastet.

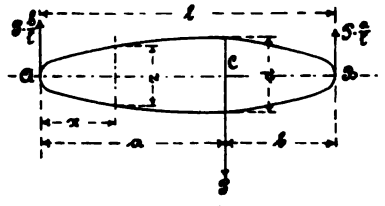


Fig. 55.

Der Theil AC verhält sich wie ein bei C eingespannter und bei A durch $P\frac{b}{l}$ belasteter Stab, der Theil BC wie ein bei C eingespannter und bei B mit $P\frac{a}{l}$ belasteter Balken (Fall wie bei Ziff. 1 und 2).

Ist der Querschnitt kreisförmig, so findet sich für den beliebigen, um x von A abstehenden Querschnitt der Strecke AC

$$M_b = P\frac{b}{l}x, \qquad \frac{\Theta}{e_1} = \frac{\pi}{32} z^3.$$

Damit wird

$$k_z = \frac{P\frac{b}{l}x}{\frac{\pi}{32}z^3} = \text{konstant},$$

$$z^3 = \frac{32\,Pb}{\pi k_z l}x,$$

d. i. die Gleichung einer kubischen Parabel, für welche AC die Hauptachse, A der Scheitel ist und deren Ordinate im Querschnitt bei C durch die Gleichung

$$d = \sqrt[3]{\frac{32Pab}{\pi k_z l}}$$

bestimmt wird.

Da sich für die Strecke BC ein ganz entsprechendes Ergebniss findet, so besteht der gesuchte Körper AB aus zwei nach kubischen Parabeln, welche sich im Querschnitt bei C schneiden, geformten Umdrehungskörpern.

Vergleiche Schlussbemerkung zu Ziff. 1.

§ 20. Die bei der Entwicklung der Gleichungen in § 16 gemachten Voraussetzungen und ihre Zulässigkeit.

Die Voraussetzungen, welche in § 16 zur Bestimmung der Biegungsanstrengung, Gl. 45, führten, sind:

1. Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äusseren Kräfte ergeben für jeden Querschnitt nur ein Kräftepaar, dessen Ebene den Querschnitt in einer der beiden Hauptachsen senkrecht schneidet.
2. Die Fasern, aus denen der Stab bestehend gedacht werden kann, wirken nicht auf einander ein, sind also unabhängig von einander.
3. Die ursprünglich ebenen Querschnitte des Stabes bleiben e b e n.

4. Der Dehnungskoefficient ist für alle Fasern gleich gross, also auch unabhängig von der Grösse und dem Vorzeichen der Dehnungen oder Spannungen.

Diese Annahmen treten am deutlichsten vor das Auge, wenn wir uns einen Körper so ausgeführt und beansprucht denken, dass sie erfüllt sind. Zu dem Zwecke stellen wir uns vor, der Stab bestehe aus einzelnen, von einander unabhängigen, ursprünglich gleich langen Fasern, etwa wie die Figuren 56 und 57 (Durchschnitt) erkennen lassen. Mit dem einen Ende seien dieselben im Boden AB befestigt, mit dem anderen an der Platte CD. Die Letztere, welche wir uns gewichtslos denken wollen, werde in der Mittelebene von einem Kräftepaar PP, dessen Moment $M_b = Pa$ ist, ergriffen. Sie dreht sich in Folge dessen um eine Achse EE. Die links von dieser gelegenen Fasern werden gedehnt, die rechts davon befindlichen erfahren eine Verkürzung. Von den gedrückten Fasern werde vorausgesetzt, dass sie sich nach der Seite hin nicht ausbiegen. Die Auffassung der Fasern als vollkommen gleicher Spiralfedern, etwa wie in Fig. 58 gezeichnet, wird diese Vorstellung erleichtern.

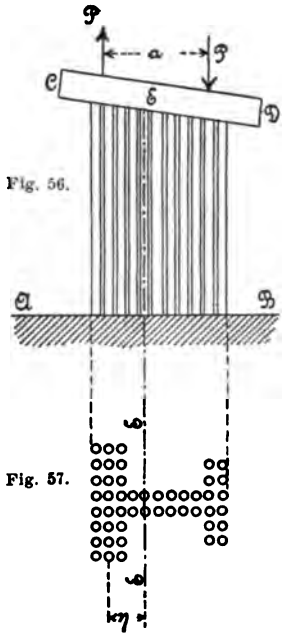


Fig. 56.

Fig. 57.

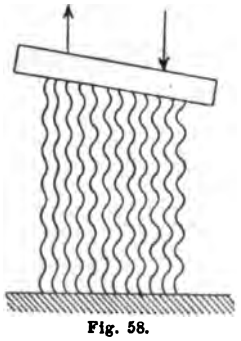


Fig. 58.

Wie ohne Weiteres ersichtlich, sind bei dieser Sachlage die Verlängerungen bezw. Verkürzungen der Fasern proportional dem Abstande von der Achse EE.

Bedeutet λ die Längenänderung, welche die ursprünglich l langen und im Abstande η von der Achse EE gelegenen Fasern erfahren haben, so ist

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{l}$$

die verhältnissmässige Dehnung im Abstande η. Wird diese Grösse im Abstande 1 mit ε' bezeichnet, so findet sich

$$\varepsilon = \varepsilon' \eta.$$

Hiermit ist eine Spannung

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{\varepsilon'}{\alpha} \eta$$

verknüpft, welcher bei dem Querschnitt f_0 der im Abstande η gelegenen Fasern eine Kraft

$$\sigma f_0 = \frac{\varepsilon'}{\alpha} \eta f_0$$

entspricht.

Die Gesammtheit dieser inneren Kräfte muss sich mit den äusseren Kräften im Gleichgewicht befinden. In Folge dessen muss sein:

die algebraische Summe dieser inneren Kräfte in Richtung der Stabachse gleich Null, d. h.

$$\Sigma \sigma f_0 = \Sigma \frac{\varepsilon'}{\alpha} \eta f_0 = 0,$$

und ferner die Summe der Momente dieser inneren Kräfte gleich dem Moment des Kräftepaares $P a = M_b$, d. h.

$$\Sigma \sigma f_0 . \eta = \Sigma \frac{\varepsilon'}{\alpha} f_0 \eta^2 = M_b.$$

Aus der ersten Bedingungsgleichung folgt bei Unveränderlichkeit von α

$$\Sigma f_0 \eta = 0,$$

d. h. die Nullachse EE geht durch den Schwerpunkt sämmtlicher Faserquerschnitte, bildet also die zweite Hauptachse des Gesammtquerschnittes.

Die zweite Bedingungsgleichung führt unter der soeben genannten Voraussetzung, α betreffend, und bei Beachtung, dass $\Sigma f_0 \eta^2 = \Theta$, zu

$$M_b = \frac{\varepsilon'}{\alpha} \Theta.$$

Beträgt der Abstand η der am stärksten gezogenen Fasern e_1, der am stärkten gedrückten $-e_2$, so erfahren diese Fasern die Spannungen

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon'}{\alpha} e_1, \quad \text{bezw.} \quad \sigma_2 = -\frac{\varepsilon'}{\alpha} e_2,$$

woraus folgt

$$\frac{\varepsilon'}{\alpha} = \frac{\sigma_1}{e_1} \qquad \frac{\varepsilon'}{\alpha} = -\frac{\sigma_2}{e_2}$$

und hiermit

$$M_b = \sigma_1 \frac{\Theta}{e_1} \qquad M_b = -\sigma_2 \frac{\Theta}{e_2}.$$

Bei Berücksichtigung, dass

$$\sigma_1 \leqq k_z \qquad -\sigma_2 \leqq k,$$

folgt

$$M_b \leqq k_z \frac{\Theta}{e_1}, \qquad M_b \leqq k \frac{\Theta}{e_2}$$

oder

$$k_z \geqq \frac{M_b}{\Theta} e_1, \qquad k \geqq \frac{M_b}{\Theta} e_2,$$

d. s. die in § 16 entwickelten Gleichungen 45.

Wir bemerken — wie hervorgehoben sei —, dass bei der vorausgesetzten Sachlage die Stabachse gerade bleibt, dass also das Kräftepaar $P\,P$ mit dem Momente $P\,a$ eine Krümmung derselben nicht veranlasst.

An die Stelle der Krümmungsachse, welche sich im Krümmungsmittelpunkt projicirt, tritt hier der Durchschnitt der Ebenen $C\,D$ und $A\,B$.

Weiter bemerken wir, dass hier die Ebene $C\,D$ aufhört, senkrecht zur Faserrichtung und zur Stabachse zu stehen.

Die Beziehung 33, welche für den gebogenen Stab, Fig. 38, unter der Voraussetzung abgeleitet worden war, dass die Querschnitte senkrecht zur gekrümmten Mittellinie stehen, gilt eben auch dann, wenn die Achse gerade bleibt, Fig. 56, nur müssen dann die einzelnen Querschnitte sich gegen die Achse derart neigen, dass ihre Ebenen sich sämmtlich in derselben Geraden schneiden, welche den Durchschnitt der Ebenen $A\,B$ und $C\,D$ bildet.

Die Tangente des Neigungswinkels eines beliebigen, zwischen AB und CD gelegenen Querschnittes ist proportional dem Abstand des Schwerpunktes desselben über AB. ϱ hat dann hierbei allerdings nicht mehr die Bedeutung des Krümmungshalbmessers, sondern bezeichnet den Abstand der Schwerachse EE von der Durchschnittslinie der Ebenen AB und CD. Eine Ersetzung von $\frac{1}{\varrho}$ durch $\pm \frac{d^2y}{dx^2}$ ist dann natürlich unzulässig.

1. Was nun zunächst die Voraussetzung unter 1 betrifft, dass die auf den Stab wirkenden äusseren Kräfte für jeden Querschnitt nur ein Kräftepaar liefern, so ist festzustellen, dass dieselbe nicht erfüllt zu sein pflegt. Die Erzeugung des biegenden Momentes erfordert Kräfte, welche nur ganz ausnahmsweise, etwa wie im Falle der Fig. 56, wobei die Stabachse gerade bleibt, oder im Falle der Fig. 59 für den mittleren Theil AB, der dann wegen $M_b =$ konstant nach einem Kreise gekrümmt ist,

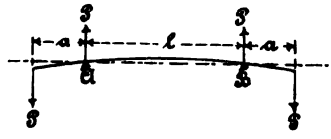


Fig. 59

nicht mehr als ein Kräftepaar ergeben. In der Regel ist immer eine Schubkraft vorhanden (vergl. Einleitung zu § 16), deren Einfluss allerdings in vielen Fällen in den Hintergrund tritt.

Hinsichtlich der Fälle, in denen die Schubkraft Bedeutung erlangt, muss auf „Biegung und Schub“ in § 52 verwiesen werden.

2. Was sodann die unter 2 genannte Voraussetzung anbelangt, dass die Fasern eine gegenseitige Wirkung auf einander nicht ausüben, so erkennt man sofort, dass dieselbe für einen aus dem Ganzen bestehenden Stab nicht erfüllt ist. Wie wir in § 1, bezw. § 11 sahen, ist verbunden: mit der Dehnung in Richtung der Stabachse eine Zusammenziehung senkrecht zu derselben, also eine Verminderung des Faserquerschnittes, und mit der Verkürzung eine Querdehnung, demnach eine Vergrösserung des Faserquerschnittes. Diese Formänderungen senkrecht zur Stabachse sind um so bedeutender, je mehr die Dehnungen (positive

wie negative) in Richtung der Fasern betragen. Da nun hier diese Längsdehnungen mit dem Abstande von der Nullachse in absoluter Hinsicht zunehmen, so werden die von der letzteren weiter abstehenden Fasern sich quer auch mehr zusammenziehen, bezw. mehr dehnen wollen, als die unmittelbar benachbarten und nach der Nullachse hin gelegenen. In Folge dessen werden diese der angestrebten Querzusammenziehung, bezw. Querdehnung zu einem Theile hinderlich sein. Dieser gegenseitige Einfluss der Fasern senkrecht zu ihrer Richtung muss nach dem Früheren (§ 7, bezw. 14), die Beziehung $\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha}$, also im Falle der Unveränderlichkeit von α die Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen beeinträchtigen und die Festigkeit etwas erhöhen (§ 9, Ziff. 1, bezw. § 14).

Ausserdem werden aber auch die fest mit einander verbundenen Fasern noch dadurch auf einander einwirken müssen, dass sich die weiter von der Nullachse abstehenden mehr ausdehnen bezw. verkürzen und deshalb gegenüber den unmittelbar benachbarten, dieser Achse näher gelegenen, ein Gleitungsbestreben haben.

In Bezug auf den gegenseitigen Einfluss der Fasern werden sich verschiedene Querschnittsformen verschieden verhalten (vergl. auch § 9). Vergleichen wir beispielsweise den rechteckigen Querschnitt (Fig. 60) mit dem ⊢⊣-förmigen Fig. 61, so erkennt man sofort, dass die auf der Linie GG liegenden Fasern des ersteren von ihren benachbarten inneren Fasern mehr beeinflusst werden müssen, als die in gleichem Abstand liegenden Fasern $BCCB$ des anderen Querschnittes. Diese sind eben zum grössten Theile nach innen frei.

Fig. 60.

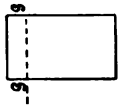
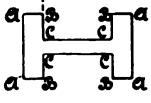


Fig. 61.



Wird z. B. aus einem und demselben Material ein Stab vom Querschnitt Fig. 60 und ein solcher vom Querschnitt Fig. 61 hergestellt, alsdann für beide auf Grund der Gleichung

$$M_b = \sigma_1 \frac{\Theta}{e_1}$$

die bei der Bruchbelastung eintretende grösste Fasernspannung σ_1 ermittelt, so muss sich für den ersteren Stab ein etwas grösserer Werth, d. h. eine etwas grössere Biegungsfestigkeit ergeben als für den letzteren.

Aus dem Erörterten folgt weiter beispielsweise für die breitbasige Eisenbahnschiene, Fig. 62, dass die im Kopfe des Querschnittes zusammengedrängte Masse der Dehnung (positiven wie negativen) einen verhältnissmässig (im Vergleich zu dem, was bei den Entwicklungen im § 16 vorausgesetzt wird) grösseren Widerstand entgegensetzt, als das Material in dem breiten, wenig hohen Fuss, und dass in Folge dessen die thatsächliche Nullachse oberhalb der horizontalen Schwerpunktsachse des Querschnittes gelegen sein muss. Wird der Letztere so bestimmt, dass diese Achse in halber Höhe liegt, so kann hiernach der Querschnitt nicht als ganz zweckmässig bezeichnet werden, namentlich dann nicht, wenn der Fuss sehr breit ist. In solchem Falle muss die wagrechte Hauptachse des Querschnittes entsprechend tiefer, als in halber Höhe sich befinden Hierdurch erklärt sich auch eine verhältnissmässig grössere Widerstandsfähigkeit starkköpfiger Stuhlschienen u. s. w. sowohl gegenüber gewöhnlicher Biegungsbeanspruchung als auch gegenüber Schlagproben.

Je mehr sich die Querschnittsfläche in zwei schmale, der Nullachse parallele Streifen zusammendrängt, Fig. 63, um so geringer

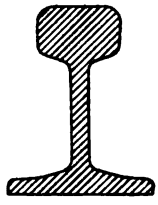


Fig. 62.

Fig. 63.

wird der gegenseitige Einfluss der Fasern aufeinander, um so zutreffender erscheinen unter sonst gleichen Verhältnissen die Beziehungen, welche auf Grund der Voraussetzung Ziff. 2 entwickelt wurden.

Ueberblicken wir das hinsichtlich des gegenseitigen Einflusses der Fasern Gefundene, so erkennen wir, dass im Allgemeinen die Anstrengungen k_z, bezw. k, wie sie sich nach den Gleichungen 45 ergeben, nicht mehr den Charakter der reinen Zug- bezw. Druckbeanspruchung besitzen, und dass es deshalb im Allgemeinen als richtig erscheint, bei Ermittlung der Abmessungen eines auf Biegung in Anspruch genommenen Stabes als zulässige Anstrengung

des Materials Werthe einzuführen, welche aus Biegungsversuchen gewonnen wurden. Inwieweit es zutreffend ist, wenn an Stelle dieser Biegungsanstrengung die aus Zugversuchen abgeleitete Grösse k_z gesetzt wird, muss — streng genommen — durch Vergleichung der Ergebnisse von Zug- und von Biegungsversuchen für jedes Material festgestellt werden. Der Beschreitung dieses Weges können sich allerdings in manchen Fällen sehr erhebliche Schwierigkeiten entgegenstellen.

Bei zusammengesetzten Körpern, wie Gitterträgern u. s. w., welche so konstruirt sind, dass die einzelnen Theile fast nur Zug und Druck erfahren, ist naturgemäss mit k_z und k (falls nicht Knickung in Betracht kommt) zu rechnen.

3. Was die oben unter 3 aufgeführte Voraussetzung anlangt, dass die Querschnitte eben bleiben, so ist festzustellen, dass auch sie nicht genau zutrifft; die Schubkraft, welche mit dem biegenden Moment unvermeidlich verknüpft zu sein pflegt, wirkt auf Krümmung der ursprünglich ebenen Querschnitte hin (vergl. „Biegung und Schub“ in § 52). Doch scheint, soweit das bis heute vorliegende Material ein Urtheil gestattet, die Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte bei ausschliesslich oder wenigstens in entschieden vorwiegender Weise auf Biegung beanspruchten Stäben zulässig zu sein.

Für einen Stab aus weichem Bessemerstahl von 140 mm Höhe und 55 mm Breite und 1200 mm Länge, welcher sich bei einer Auflagerentfernung von 1000 mm um 241,5 mm durchgebogen hatte, ohne zu brechen, stellte Bauschinger fest, dass bei dieser ganz bedeutenden Durchbiegung die ursprünglich ebenen Querschnitte eben, sowie senkrecht zur elastischen Linie geblieben waren, und die Länge der früher geraden, 1000 mm langen elastischen Linie sich nicht geändert hatte.

Versuche des Verfassers mit allerdings weniger hohen Stäben aus Schmiedeisen führten zu dem gleichen Ergebniss.

4. Die Voraussetzung 4, dass der Dehnungskoefficient α konstant ist, also gleich für Zug und für Druck, sowie unabhängig von der Grösse der Spannungen oder Dehnungen, erscheint nur für manche Materialien, beispielsweise für Schmiedeisen und Stahl, zulässig. Bei Gusseisen z. B. ist sie dagegen nicht zutreffend; hier nimmt α mit wachsender Spannung oder Dehnung zu, wie Fig. 64 erkennen lässt. In derselben sind

für zähes Gusseisen die Spannungen als senkrechte Abscissen aufgetragen und zwar Zugspannungen nach oben, Druckspannungen nach unten. Die wagrechten Ordinaten stellen die zugehörigen Verlängerungen $+\varepsilon$, bezw. Verkürzungen $-\varepsilon$ dar, sodass der Kurvenzweig OZ die Dehnungslinie für Zug und der Zweig OD die Dehnungslinie für Druck bildet. In dem Koordinatenanfang O gehen die beiden Zweige — naturgemäss — stetig in einander über, haben also hier eine gemeinschaftliche Tangente TOT. O bildet einen Wendepunkt der Dehnungskurve ZOD, die durch ihre fortgesetzt wachsende Neigung nach der ε-Achse hin deutlich erkennen lässt, dass die Dehnungen mit wachsender Spannung rascher zunehmen als diese, doch erscheint dieses Wachsthum für Zugspannungen erheblich grösser als für gleich grosse Druckspannungen.

Hieraus erhellt, dass der Dehnungskoefficient α für Zug und Druck nur im Koordinatenanfange O gleich ist, entsprechend der Richtung der Tangente TOT in diesem Punkte der Kurve ZOD. Im vorliegendem Falle beträgt die im Abstande $\overline{OE} = \sigma = 1600$ kg gelegene Strecke $\overline{ET} = 0{,}00105$, somit ist im Punkte O

$$\alpha = \frac{0{,}00105}{1600} = \sim \frac{1}{1520000}.$$

Weiter ergiebt sich für die einzelnen Spannungsstufen:

bei Zug

$$\sigma = \quad 0 \text{ bis } 400 \text{ kg} \quad \alpha = \frac{0{,}00039}{400} = \sim \frac{1}{1030000},$$

$$\sigma = 400 \text{ „ } 800 \text{ „} \quad \alpha = \frac{0{,}00083 - 0{,}00039}{800 - 400} = \sim \frac{1}{900000},$$

$$\sigma = 800 \text{ „ } 1200 \text{ „} \quad \alpha = \frac{0{,}0014 - 0{,}00083}{1200 - 800} = \sim \frac{1}{702000},$$

$$\sigma = 1200 \text{ „ } 1600 \text{ „} \quad \alpha = \frac{0{,}0025 - 0{,}0014}{1600 - 1200} = \sim \frac{1}{364000},$$

bei Druck

$$\sigma = \quad 0 \text{ bis } 400 \text{ kg} \quad \alpha = \frac{0{,}00029}{400} = \sim \frac{1}{1380000},$$

$$\sigma = 400 \text{ „ } 800 \text{ kg} \quad \alpha = \frac{0{,}00061 - 0{,}00029}{800 - 400} = \sim \frac{1}{1250000},$$

$$\sigma = 800 \text{ bis } 1200 \text{ „} \qquad \alpha = \frac{0{,}00096 - 0{,}00061}{1200 - 800} = \sim \frac{1}{1140000},$$

$$\sigma = 1200 \text{ „ } 1600 \text{ „} \qquad \alpha = \frac{0{,}00136 - 0{,}00096}{1600 - 1200} = \sim \frac{1}{1000000}.$$

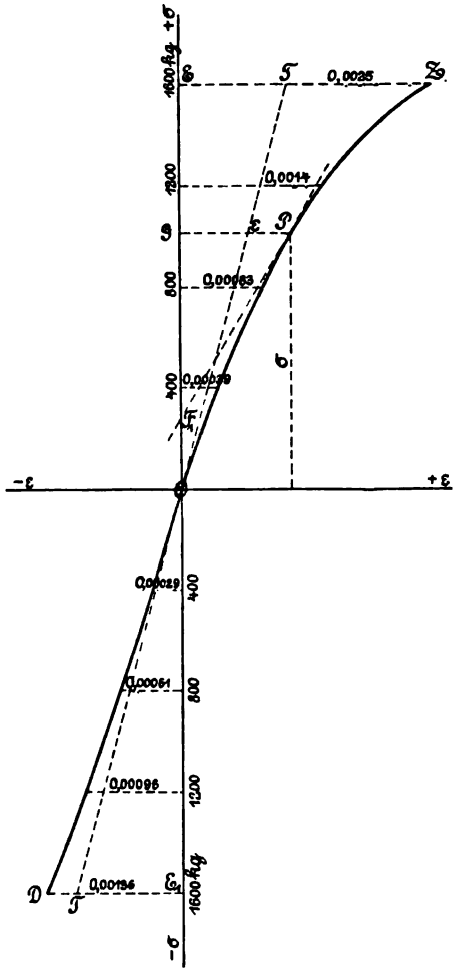


Fig. 64.

Hiernach wächst α bei Zug bis $\frac{1}{364000}$, also sehr bedeutend, und bei Druck bis $\frac{1}{1000000}$, somit im ersteren Falle stärker als im letzteren[1]).

Bei der Verschiedenartigkeit des Gusseisens ergiebt sich das Wachsthum[2]) von α erheblich verschieden, aber immer in dem Sinne veränderlich, wie in Fig. 64 dargestellt.

[1]) Die Würdigung dieses Unterschiedes im Wachsthum von α darf nicht ausser Acht lassen, dass bei $\sigma = +1600$ kg/qcm die Zugfestigkeit des Materials zum grössten Theil erschöpft ist, während bei $\sigma = -1600$ kg/qcm die Anstrengung nur etwa $^1/_5$ bis $^1/_4$ der Druckfestigkeit beträgt. (Vergl. § 13, 1, a.)

[2]) Will man dasselbe streng feststellen, so ist davon auszugehen, dass für die beliebige Spannung σ, welcher auf der Dehnungslinie, Fig. 64, der Punkt P entspricht, der Dehnungskoefficient erhalten wird durch Ziehen der Tangente PF_1 im Punkte P dieser Kurve und durch Bildung des Verhältnisses $P\overline{G} : \overline{GF_1}$, d. h.

$$\alpha = \frac{\overline{GP}}{\overline{GF_1}}.$$

Nach Massgabe des Gesagten werden für einen auf Biegung beanspruchten Stab aus Gusseisen unter der Annahme, dass die Querschnitte eben bleiben, zwar die Dehnungen proportional mit

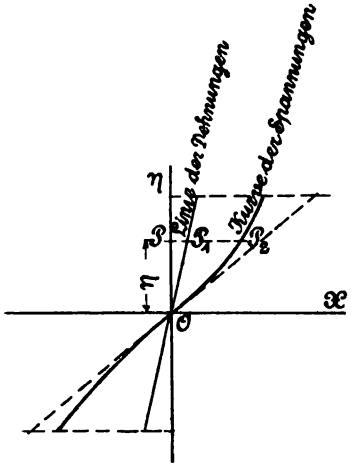


Fig. 65.

dem Abstande η von der Nullachse wachsen, nicht aber die Spannungen; letztere müssen vielmehr langsamer zunehmen, entsprechend dem Umstande, dass α in $\sigma = \varepsilon : \alpha$ mit wachsender Dehnung (Spannung) zunimmt. Fig. 65 veranschaulicht dies. Für die beliebig

---

Für den Punkt Z der Dehnungslinie ergiebt sich auf diesem Wege mit der Genauigkeit, mit welcher sich die Tangente im Punkt Z konstruiren lässt,

$$\alpha = \frac{0{,}0025}{560} = \sim \frac{1}{224\,000}$$

und für den Punkt D

$$\alpha = \frac{0{,}00136}{1130} = \sim \frac{1}{830\,000}.$$

Wir erhalten somit α wachsend von $\frac{1}{1520000}$ (bei $\sigma = 0$) bis $\frac{1}{224\,000}$ (bei $\sigma = +1600$ kg), bezw. bis $\frac{1}{830\,000}$ (bei $\sigma = -1600$ kg). Wie sich aus früher Bemerktem ergiebt, ist von dieser Dehnung ein bedeutender Theil bleibend. Hinsichtlich der Ermittlung des Dehnungskoefficienten der Federung vergl. Schluss von § 4.

Hat man auf Grund von Versuchsergebnissen das Abhängigkeitsgesetz zwischen den zwei Veränderlichen σ und ε aufgestellt, etwa $\varepsilon = f(\sigma)$, so liegt in dem Differentialquotienten

$$\alpha = \frac{d\varepsilon}{d\sigma}$$

auch die entsprechende Gesetzmässigkeit für den Dehnungskoefficienten α vor. (Vergl. den letzten Absatz von § 20.)

um η von der Nullachse abstehende Faserschicht sei $\overline{PP_1}$ die Dehnung und $\overline{PP_2}$ die Spannung; dann ist für Gusseisen der geometrische Ort aller Punkte P_2 eine gegen die Achse der η gekrümmte, in OP_2 sich projicirende Fläche, wenn auch die Punkte P_1 auf der durch die Nullachse gehenden Ebene OP_1 liegen. Die Spannungen nehmen hiernach nicht mit der ersten Potenz von η zu, sie wachsen langsamer. Infolge dessen liefern die Gleichungen 43 bis 45 die Spannungen grösser, als sie thatsächlich sind. Ein und dasselbe Gusseisen muss deshalb bei Biegungsversuchen eine höhere Festigkeit ergeben, als bei Zugversuchen.

Aus dem Erörterten folgt dann weiter, dass das nach der Nullachse hin gelegene Material im Verhältniss zu seinem Abstande von dieser stärker gespannt ist als das weiter auswärts befindliche. Es wird also das Erstere nicht so schlecht ausgenützt, als nach Massgabe des in der Gleichung 42 ausgesprochenen Gesetzes anzunehmen ist. Daher werden Stäbe mit Querschnitten, bei denen sich das Material nach der Nullachse hin zusammendrängt, widerstandsfähiger sein, als nach Gl. 42 zu schliessen ist. Beispielsweise wird ein Stab mit kreisförmigem Querschnitt eine grössere Bruchbelastung, bestimmt aus der Gleichung 43, liefern müssen, als ein Stab mit quadratischem Querschnitt; dieser wird dagegen eine grössere Biegungsfestigkeit aufzuweisen haben, als der I-förmige Querschnitt u. s. w.

5. Zusammenfassung.

Bedeutet

k_b die im Allgemeinen aus Biegungsversuchen abgeleitete zulässige Anstrengung des Materials,

e den Abstand der am stärksten angestrengten Faser des auf Biegung in Anspruch genommenen Stabes,

so wird nach Massgabe des unter 2 und 4 Erkannten an Stelle der Beziehungen 45 zu setzen sein

$$M_b \leq k_b \frac{\Theta}{e} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 68)$$

Hierin ist k_b — streng genommen für alle Materialien — abhängig von der Querschnittsform. Von grösserer Bedeutung wird diese Abhängigkeit — wie das vorliegende Versuchsmaterial schliessen lässt — jedoch erst bei solchen Materialien, für welche der Dehnungskoefficient α veränderlich ist (Gusseisen);

bei Materialien mit konstantem α (Schmiedeisen, Stahl) tritt sie zurück.

Die Feststellung der elastischen Linie auf Grund der Gl. 41 liefert für den Fall, dass α konstant ist, befriedigende Ergebnisse. Trifft jedoch diese Voraussetzung nicht zu, so kann bei starker Beanspruchung des Materials der Unterschied zwischen Rechnung und thatsächlichem Ergebniss erheblich ausfallen[1]).

Streng genommen wären für Stäbe aus Materialien mit veränderlichen Dehnungskoefficienten die in §§ 16, 18 und 19 gegebenen Entwicklungen unter Beachtung der Abhängigkeit des Werthes α von σ oder ε durchzuführen (vergl. Fussbemerkung S. 98 und 99). Die Rücksicht auf die erforderliche Einfachheit unsrer technischen Rechnungen muss — jedenfalls zur Zeit noch — davon abhalten, in dieser Weise vorzugehen. Hinsichtlich des vom Verfasser eingeschlagenen Weges, der Veränderlichkeit von α bei Gusseisen Rechnung zu tragen, sei auf § 22, Ziff. 2 verwiesen.

§ 21. Biegungsanstrengung und Durchbiegung unter der Voraussetzung, dass die Ebene des Kräftepaares keine der beiden Hauptachsen des Querschnittes in sich enthält.

I. Hauptachsen eines Querschnittes. Hauptträgheitsmomente.

In der Fläche, Fig. 66, sei O ein beliebiger Punkt derselben, OX und OY ein rechtwinkliges, sonst jedoch in ersterer beliebig gelegenes Achsenkreuz; die Koordinaten des mit dem Flächenpunkte P zusammenfallenden Flächenelementes seien x und y. Dann ist das Trägheitsmoment der Fläche

[1]) Nach Gleichung 62

$$y' = \frac{\alpha}{48} \frac{P l^3}{\Theta}$$

kommt es bezüglich der Durchbiegung y' eines in der Mitte mit P belasteten Stabes nur auf das Trägheitsmoment Θ des Querschnittes an: infolge dessen es z. B. gleichgiltig erscheint, ob bei einem Querschnitte, wie Fig. 47, die breite oder die schmale Flansche als die gezogene auftritt, wenn nur P und l die gleichen Werthe besitzen. Thatsächlich erweist sich bei gusseisernen Trägern wegen der Veränderlichkeit von α die Durchbiegung im letzteren Falle entschieden grösser als im ersteren. (Vergl. des Verfassers Arbeit „Die Biegungslehre und das Gusseisen“ in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1888, S. 224.)

in Bezug auf die X-Achse $\Theta_x = \int y^2 df$,

„ „ „ „ Y- „ $\Theta_y = \int x^2 df$

und hinsichtlich der unter dem Winkel φ gegen die X-Achse geneigten Geraden OO, von welcher P, demnach auch df um $z = y\cos\varphi - x\sin\varphi$ absteht,

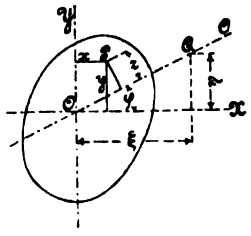


Fig. 66.

$$\Theta = \int z^2 df = \int (y\cos\varphi - x\sin\varphi)^2\, df$$

$$\Theta = \Theta_x \cos^2\varphi + \Theta_y \sin^2\varphi - 2Z\sin\varphi\cos\varphi, \quad . \quad . \quad 69)$$

sofern

$$Z = \int xy\, df \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 70)$$

Auf der Achse OO werde nun von O aus die Strecke $\overline{OQ} = r = \sqrt{\frac{1}{\Theta}}$ aufgetragen und den Koordinaten des so erhaltenen Punktes Q in Bezug auf OX und OY die Bezeichnung ξ und η ertheilt, sodass

$$\xi = r\cos\varphi \qquad \eta = r\sin\varphi.$$

Aus Gleichung 69 folgt dann mit Rücksicht darauf, dass

$$\Theta = \frac{1}{r^2}$$

$$1 = \Theta_x r^2\cos^2\varphi + \Theta_y r^2\sin^2\varphi - 2Zr^2\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$1 = \Theta_x \xi^2 + \Theta_y \eta^2 - 2Z\xi\eta.$$

Diese Beziehung zwischen den Veränderlichen ξ und η ist die Gleichung einer Ellipse. Hiernach findet sich der geometrische Ort aller derjenigen Punkte Q, welche erhalten werden, wenn auf jeder durch O möglichen Geraden die Wurzel aus dem reciproken

Werthe des für diese Gerade sich ergebenden Trägheitsmomentes aufgetragen wird, als Ellipse, mit O als Mittelpunkt, d. i. die sogenannte Trägheitsellipse. Nun sind in einer Ellipse zwei senkrecht aufeinander stehende Achsen vorhanden — die grosse und die kleine Achse —, für welche das Glied mit dem Produkt der beiden Koordinaten verschwindet. Dies tritt ein, wenn $Z = 0$. Werden demnach diese beiden Achsen zu Achsen der x und der y gewählt, so wird der Ausdruck Gleichung 70 zu Null.

Ferner ist bekannt, dass die grosse Halbachse der Ellipse der grösste und die kleine Halbachse der kleinste der möglichen Werthe von r ist. Diese beiden ausgezeichneten Richtungen werden als die beiden Hauptachsen der Fläche für den Punkt O bezeichnet. Sie sind nach Massgabe des Vorstehenden gekennzeichnet durch

$$Z = \int xy\,df = 0$$

und

$$\Theta_x = \text{Max.}, \qquad \Theta_y = \text{Min.} \quad \text{oder} \quad \Theta_x = \text{Min.}, \qquad \Theta_y = \text{Max.}$$

Dieser kleinste und dieser grösste Werth unter den Trägheitsmomenten, welche sich für alle Geraden ergeben, die durch den Punkt O in der Ebene der Fläche gezogen werden können, heissen die beiden Hauptträgheitsmomente der Fläche für den Punkt O derselben.

Werden die beiden Hauptträgheitsmomente mit Θ_1 und Θ_2 bezeichnet, so findet sich das Trägheitsmoment Θ für eine beliebige durch O gehende Gerade, welche mit der Achse des Hauptträgheitsmomentes Θ_1 den Winkel φ einschliesst, nach Gleichung 69 zu

$$\Theta = \Theta_1 \cos^2\varphi + \Theta_2 \sin^2\varphi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 71)$$

Besitzen Θ_1 und Θ_2 gleiche Grösse, so folgt

$$\Theta = \Theta_1 = \Theta_2,$$

d. h. die Trägheitsmomente für alle durch O möglichen Geraden sind einander gleich. Die Trägheitsellipse geht dann in einen Kreis über.

Das Vorstehende gilt für einen beliebigen Punkt der Fläche. Dementsprechend hat eine Fläche unendlich viele Hauptachsen und Hauptträgheitsmomente. Wird von den Hauptachsen oder den Hauptträgheitsmomenten eines Querschnittes kurzhin gesprochen, so sind hierunter die entsprechenden Grössen für den Schwerpunkt des Letzteren verstanden.

2. Biegungsanstrengung.

Wir wählen die beiden Hauptachsen des Querschnittes Fig. 67 zu Achsen der y und z. Θ_1 gelte als das Trägheitsmoment in Bezug auf die Hauptachse OY und Θ_2 als dasjenige hinsichtlich der Hauptachse OZ. Ferner sei $\overline{OM_b}$ die Paarachse des biegenden Kräftepaares vom Momente M_b, d. h. diejenige Gerade, welche in O senk-

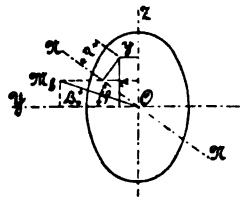


Fig. 67.

recht zur Paarebene steht, mit ihrer Grösse OM_b das Moment M_b darstellt und derart eingetragen wird, dass von M_b nach O hin gesehen das Moment M_b rechts drehend erscheint. Die zur Krümmungsachse, welche um ϱ von O absteht, parallele Nullachse besitze die Lage NN, schliesse also mit OY den Winkel φ ein, während OM_b um β gegen OY geneigt ist.

Nach Gleichung 34 ist die Spannung σ in dem Flächenelement df, dessen Lage durch y und z bestimmt ist

$$\sigma = \frac{1}{\alpha}\frac{\eta}{\varrho} = \frac{1}{\alpha}\frac{z\cos\varphi - y\sin\varphi}{\varrho}.$$

Je die Summe der Momente, welche diese Spannung für alle Flächenelemente in Bezug auf die y- und die z-Achse ergiebt, muss sich im Gleichgewicht befinden mit den Komponenten des Kräftepaares M_b, d. i. mit

$$M_b\cos\beta, \text{ bezw. } M_b\sin\beta.$$

Folglich

$$M_b\cos\beta = \int \sigma df\,.\,z = \int\frac{1}{\alpha}\frac{z\cos\varphi - y\sin\varphi}{\varrho}\,z\,df,$$

$$M_b\sin\beta = -\int \sigma df\,.\,y = -\int\frac{1}{\alpha}\frac{z\cos\varphi - y\sin\varphi}{\varrho}\,y\,df.$$

Unter Voraussetzung der Unveränderlichkeit des Dehnungskoefficienten α und unter Beachtung, dass OY und OZ die Hauptachsen des Querschnittes sind, für welche die Grösse Z (Gl. 70) verschwindet, ergiebt sich

$$M_b \cos\beta = \frac{1}{\alpha\varrho}\Theta_1 \cos\varphi \text{ oder } \frac{\cos\varphi}{\varrho} = \alpha\frac{M_b}{\Theta_1}\cos\beta,$$

$$M_b \sin\beta = \frac{1}{\alpha\varrho}\Theta_2 \sin\varphi \text{ oder } \frac{\sin\varphi}{\varrho} = \alpha\frac{M_b}{\Theta_2}\sin\beta,$$

und hieraus

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Theta_1}{\Theta_2}\operatorname{tg}\beta, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 72)$$

$$\frac{1}{\varrho} = \alpha M_b \sqrt{\frac{\cos^2\beta}{\Theta_1^2} + \frac{\sin^2\beta}{\Theta_2^2}}, \quad \ldots\ldots \quad 73)$$

$$\sigma = \frac{1}{\alpha}\frac{\eta}{\varrho} = M_b \eta \sqrt{\frac{\cos^2\beta}{\Theta_1^2} + \frac{\sin^2\beta}{\Theta_2^2}}, \quad \ldots \quad 74)$$

oder

$$\sigma = \frac{1}{\alpha}\frac{z\cos\varphi - y\sin\varphi}{\varrho} = M_b\left(\frac{z\cos\beta}{\Theta_1} - \frac{y\sin\beta}{\Theta_2}\right). \quad 75)$$

Die Gleichung 74 geht in die Gleichung 42 über, wenn

$$\beta = 0,$$

d. h. wenn die Paarachse mit einer der beiden Hauptachsen zusammenfällt, oder

$$\text{wenn } \Theta_1 = \Theta_2 = \Theta,$$

d. h. wenn die Hauptträgheitsmomente und damit alle Trägheitsmomente gleich sind, was beispielsweise zutrifft für den Kreis, das gleichseitige Dreieck, das Quadrat, überhaupt für alle regelmässigen Vielecke, für den kreuzförmigen Querschnitt bei gleichen Abmessungen der Rippen u. s. f.

Für den besonderen Fall des Rechteckes, Fig. 68, folgt wegen

$$\Theta_1 = \frac{1}{12}bh^3 \qquad \Theta_2 = \frac{1}{12}b^3h$$

aus Gleichung 72

$$\operatorname{tg}\varphi = \left(\frac{h}{b}\right)^2 \operatorname{tg}\beta.$$

Die grösste Spannung σ_{max} wird auftreten im Punkte E, für welchen $z = 0{,}5\,h$, $y = -0{,}5\,b$

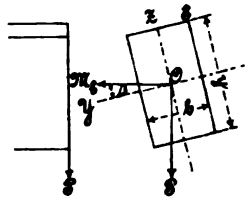


Fig. 68.

$$\sigma_{max} = \frac{6\,M_b}{b\,h}\left(\frac{\cos\beta}{h} + \frac{\sin\beta}{b}\right)$$

und mit Rücksicht auf § 20, Ziff. 5

$$k_b \geqq \frac{6\,M_b}{b\,h}\left(\frac{\cos\beta}{h} + \frac{\sin\beta}{b}\right) \quad \ldots\ldots \quad 76)$$

3. Durchbiegung.

Die Durchbiegung eines Stabes, dessen Belastungsebene die Querschnitte nicht in einer der beiden Hauptachsen schneidet, pflegt nur insofern praktisches Interesse zu haben, als unter Umständen der Stab gehindert sein kann, sich in der Richtung zu

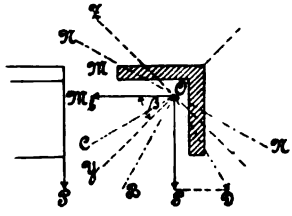


Fig. 69.

bewegen, in welcher er sich durchbiegen will, wodurch Zusatzkräfte wachgerufen werden. Denken wir uns beispielsweise einen l langen Stab von dem in Fig. 69 gezeichneten Querschnitt an einem Ende eingespannt und am anderen Ende mit P belastet, so ergiebt sich für die senkrechte Belastungsebene OP die horizontale Paarachse $\overline{OM_b} = M_b = P\,l$. Unter der Voraussetzung, dass der winkelförmige

Querschnitt gleiche Schenkel besitzt, werden die beiden Hauptachsen OY und OZ unter 45° gegen den Horizont geneigt sein. Bezeichnet nun Θ_1 das Trägheitsmoment in Bezug auf die eine Hauptachse OY und Θ_2 dasjenige hinsichtlich der zweiten Hauptachse OZ, so folgt die Lage der Nullachse NN nach Gleichung 72 unter Beachtung, dass $\beta = 45°$. Da die Krümmungsachse parallel zu NN läuft, so ergiebt sich die Durchbiegungsrichtung in der zu NN senkrechten Geraden OB. Hiermit wird sich das eine Ende des Stabes unter Einwirkung der vertikalen Belastung P in der Richtung OB durchbiegen.

Wenn nun zwei solche Stäbe mit einander verbunden sind, wie z. B. Fig. 70 erkennen lässt, so wird diese Durchbiegung in Folge der Verbindung mehr oder minder vollständig gehindert, d. h. auf die beiden Stäbe wirkt noch je eine horizontale, nach innen gerichtete Kraft H, welche unter Umständen, namentlich dann, wenn

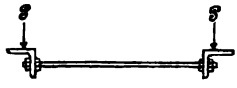


Fig. 70.

sie nicht durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht — und damit auch auf Verdrehung hinwirkt —, die Anstrengung des Materials wesentlich beeinflussen kann.

Unter der Annahme, dass die Abweichung der Träger in horizontaler Richtung durch ihre Verbindung vollständig gehindert wird, würde sich H aus der Erwägung ergeben, dass die Durchbiegungsrichtung mit OP zusammenfallen muss. Damit dies eintritt, müsste $\measuredangle\ YON = \varphi = 45°$ sein, also nach Gleichung 72

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \operatorname{tg} \beta,$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Theta_2}{\Theta_1}.$$

Die hierdurch bestimmte Lage der Paarachse OC lieferte in der zu ihr Senkrechten OD die Richtung der Belastung (für vertikale Durchbiegung) und damit in $\overline{PD}$ die gesuchte Horizontalkraft H.

§ 22. Biegungsversuche.

1. Biegungsversuche im Allgemeinen.

Biegungsversuche werden in der Regel nach Massgabe der Fig. 46 angestellt und zwar derart, dass die Belastung P in der Mitte des Stabes angreift. Unter der Voraussetzung, dass das Eigengewicht desselben vernachlässigt werden darf, ergiebt sich alsdann für den mittleren Querschnitt die Durchbiegung y' der Mittellinie des Stabes nach Gleichung 62 zu

$$y' = \frac{\alpha}{48} \frac{P l^3}{\Theta} \quad \ldots \ldots \quad 62)$$

und die Spannung σ_1 der um e_1 von der Nullachse abstehenden und am stärksten gespannten Fasern nach Gleichung 56a und Gleichung 43 zu

$$\sigma_1 = \frac{P l}{4 \Theta} e_1.$$

Durch Beobachtung der zu einer jeden Belastung P gehörigen Durchbiegung y' lässt sich für einen bestimmten Stab der Dehnungskoefficient

$$\alpha = 48 \frac{\Theta}{l^3} \frac{y'}{P},$$

oder auch dessen reciproker Werth (Elasticitätsmodul)

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{l^3}{48 \Theta} \frac{P}{y'}$$

ermitteln.

Es ist bisher allgemein üblich gewesen, α bezw. $\frac{1}{\alpha}$ in dieser Weise zu bestimmen, gleichgiltig, wie gross die Höhe des Stabes im Verhältniss zur Entfernung der Auflage war. Ist sie verhältnissmässig bedeutend, so verliert die Gleichung 62 an Genauigkeit, da die Durchbiegung des Stabes nicht blos von dem biegenden Moment, sondern auch von der Schubkraft abhängt. Die Vernachlässigung des Einflusses der Schubkraft liefert α zu gross und $\frac{1}{\alpha}$ zu klein. Wie Verfasser in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1888

S. 222 u. f. nachgewiesen hat, beträgt der hierdurch begangene Fehler in Fällen stattgehabter Ermittelung des Werthes $\frac{1}{\alpha}$ über 30%.

Diese Ausserachtlassung der Schubkraft vorzugsweise ist es gewesen, welche zu dem Irrthum Veranlassung gegeben hat, dass der Elasticitätsmodul, d. i. $\frac{1}{\alpha}$ für Biegung entschieden geringer sei als für Zug und Druck[1]). Die Erwägung des in § 20 unter 2 Erörterten führt übrigens ohne Weiteres zu der Erkenntniss, dass genaue Biegungsversuche und strenge Rechnung α eher ein wenig kleiner, also $\frac{1}{\alpha}$ eher etwas grösser als Zug- und Druckversuche liefern müssen.

Unter Umständen kann der nach Gleichung 62 ermittelte Werth von α noch durch einen anderen Einfluss ungenau geworden sein. In Folge der Durchbiegung gleitet die Staboberfläche auf den Auflagern; hierdurch werden Reibungskräfte wachgerufen, welche auf die Grösse des biegenden Momentes je nach den Verhältnissen mehr oder minder abändernd einwirken. (Vergl. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1888, S. 224 u. f.)

Im vierten Abschnitt unter „Biegung und Schub“ (§ 52), sowie unter „Zug, Druck, Biegung“ (§ 46), wird auf den Einfluss der Schubkraft, bezw. der zuletzt erwähnten Reibung näher einzugehen sein.

Die Beobachtung der Belastung P_{max}, bei welcher der Bruch des durchgebogenen Stabes erfolgt, führt mittelst der Gleichung

$$K_b = \frac{P_{max} l}{4 \Theta} e_1$$

zur Biegungsfestigkeit K_b, bezogen auf den ursprünglichen Stabquerschnitt.

Handelt es sich um zähes Material, wie z. B. weichen Stahl, so findet überhaupt kein Bruch statt; an die Stelle der Bruchfestigkeit tritt die Fliessgrenze (vergl. Schluss von § 11). Die Fortsetzung des Versuches, wobei der Stab eine überaus weitgehende

[1]) Hiernach ist auch die Angabe zu beurtheilen, dass der Elasticitätsmodul für Biegung um etwa ein Zehntel geringer als für Zug und Druck zu wählen sei.

Aenderung der Form, insbesondere auch des Querschnittes erfährt, kann, inwieweit es sich um die Ermittlung von K_b handelt, dann unterbleiben.

2. Abhängigkeit der Biegungsfestigkeit des Gusseisens von der Querschnittsform.

Nach § 20, Ziff. 4 muss Gusseisen in Folge der Veränderlichkeit des Dehnungskoefficienten gegenüber den Konstruktionsmaterialien, welche innerhalb gewisser Spannungsgrenzen konstante Dehnungskoefficienten besitzen, ein abweichendes Verhalten bei Biegungsversuchen zeigen; namentlich muss trotz der vergleichsweise geringen Formänderungen, welche Gusseisen erfährt, die Biegungsfestigkeit, berechnet auf Grund der Gleichung 43

$$M_b = \sigma_1 \frac{\Theta}{e_1}$$

wesentlich grösser sich ergeben als die Zugfestigkeit und in bedeutendem Masse abhängig sein von der Querschnittsform.

In diese Verhältnisse gewähren die vom Verfasser angestellten Versuche Einblick. Ausführlich ist hierüber berichtet in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1888 S. 193 bis 199, S. 221 bis 226, S. 1089 bis 1094, 1889 S. 137 bis 145.

Die im Folgenden je unter einer Bezeichnung aufgeführten Versuchskörper sind aus dem gleichen Material bei einem und demselben Gusse hergestellt worden.

Gusseisen A.

Zug- und Biegungsstäbe bearbeitet.

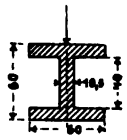
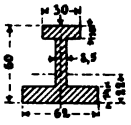
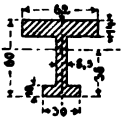
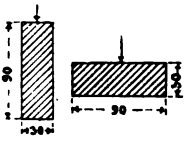
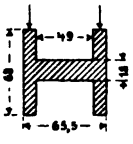
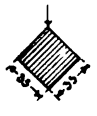
Zugversuche zur Ermittlung der Zugfestigkeit.

$$\text{Zugfestigkeit} = \frac{1445 + 1355 + 1409 + 1377}{4} = 1396 \text{ kg},$$

$$\text{Zugfestigkeit} = \frac{1369 + 1303 + 1355}{3} = 1342 \text{ „}$$

$$K_z = 1369 \text{ kg}.$$

47 Biegungsversuche zur Bestimmung der Biegungsfestigkeit.

No.	Querschnittsform	Biegungsfestigkeit $K_b = \frac{P_{max}\, l}{4\,\Theta}\, e_1$		$\frac{6}{5}\sqrt{\frac{e}{z_o}}$, bezw. $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{e}{z_o}}$,	Bemerkungen
		absolut in kg/qcm	in Theilen der Zugfestigkeit		
1	2	3	4	5	6
1		1979	1,45	1,43	
2		2081	1,52	1,49	
3		2076	1,52	1,49	Es zerreisst die schmale Flansche, die breite bleibt unverletzt.
4		2395	1,75	1,70	
5		2372	1,73	1,70	
6		2905	2,12	2,05	
7		2929	2,14	2,06	
8		3218	2,35	2,31	

Die Biegungsfestigkeit überschreitet hiernach die für dasselbe Gusseisen ermittelte Zugfestigkeit um so bedeutender, je mehr sich das Material verhältnissmässig nach der Nullachse hin zusammendrängt. (Vergl. § 20, Ziff. 4.)

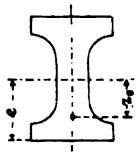


Fig. 71.

Die hiernach festgestellte Abhängigkeit der Biegungsfestigkeit K_b von der Querschnittsform und der Zugfestigkeit K_z lässt sich mit guter Annäherung zum Ausdruck bringen durch die Beziehung

$$K_b = \mu_0 \sqrt{\frac{e}{z_o}} \cdot K_z. \quad \ldots \ldots \quad 77)$$

Hierin bedeutet

z_o den Abstand des Schwerpunktes der auf der einen Seite der Nullachse gelegenen Querschnittsfläche von dieser Schwerlinie, Fig. 71,

μ_0 einen Koefficienten, der im vorliegenden Falle (vergl. die Werthe der Spalten 4 und 5, S. 111) gewählt werden darf

a) für diejenigen Querschnitte, welche oben und unten durch eine wagrechte Gerade begrenzt sind, wie No. 1, 2, 3, 4, 5 und 7, etwa $\frac{6}{5} = 1{,}2$,

b) für die beiden Querschnitte No. 6 und 8, welche oben und unten nicht durch wagrechte Gerade begrenzt sind, bei denen — streng genommen — nur eine einzige Faser am stärksten gespannt ist, etwa $\frac{4}{3} = 1{,}33$.

Ueber den Einfluss der Gusshaut auf μ_0 vergl. Ziff. 3 Schluss.

Gusseisen B von hoher Festigkeit.

Zug- und Biegungsstäbe bearbeitet.

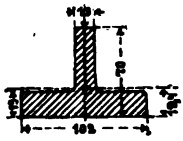
Querschnitt kreisförmig, 36 mm Durchmesser.

Zugfestigkeit = (1893 + 1847 + 1805 + 1846) : 4 = 1848 kg.

Biegungsfestigkeit = (4321 + 4148 + 4073 + 3930 + 4295 + 3903 + 4513 + 3920) : 8 = 4139 kg = 2,24 . Zugfestigkeit.

Gusseisen C.

Zugstäbe bearbeitet, Biegungsstab unbearbeitet (also mit Gusshaut).



Zugfestigkeit	1310 kg,
Biegungsfestigkeit	2114 kg,
Verhältniss beider	$2114 : 1310 = 1{,}61 : 1.$

Gusseisen D.

Zug- und Biegungsstäbe bearbeitet.

a) Querschnitt: Fig. 42.

Die schmale Flansche ist die gezogene, die breite die gedrückte.

Beim Biegungsversuch reisst die schmale Flansche, die breite bleibt unverletzt.

Zugfestigkeit	1418 kg,
Biegungsfestigkeit	2077 kg,
Verhältniss beider	$2077 : 1418 = 1{,}46 : 1.$

b) Quadratischer Querschnitt:

Biegungsfestigkeit	2539 kg,
Verhältniss	$2539 : 1418 = 1{,}78 : 1.$

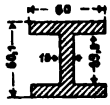
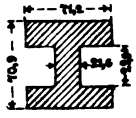
3. Einfluss der Gusshaut.

Gusseisen E.

Zugstäbe (3 Stück) bearbeitet.

Biegungsstäbe (14 Stück), zum Theil bearbeitet (5 Stück), zum Theil unbearbeitet (9 Stück).

$$\text{Zugfestigkeit } K_z = \frac{1560 + 1586 + 1640}{3} = 1595 \text{ kg}.$$

No.	Querschnitts-form	Biegungsfestigkeit $K_b = \frac{P_{max}\, l}{4\,\Theta}\, e_1$			
		Stäbe bearbeitet		Stäbe unbearbeitet	
		absolut in kg/qcm	in Theilen von K_z	absolut in kg/qcm	in Theilen von K_z
1	2	3	4	5	6
1		2765	1,73	—	—
2		—	—	2295	1,44[1])
3		—	—	2390	1,50[1])
4		2254	1,41	—	—
5		—	—	2026	1,27

Der Vergleich der Spalten 4 und 6 zeigt deutlich, dass die Biegungsfestigkeit der bearbeiteten, also von der Gusshaut befreiten Stäbe entschieden grösser ist, als diejenige der unbearbeiteten Stäbe. Das Vorhandensein der Gusshaut wirkt demnach auf Verminderung der Biegungsfestigkeit hin.

[1]) Die in Lieferungsvorschriften auftretende Forderung, es solle bei Gusseisen $K_z \geqq 1200$ kg und ausserdem für unbearbeitete Quadratstäbe von 30 mm Seitenlänge im Falle $l = 1000$ mm, $P_{max} \geqq 450$ kg, entsprechend $K_b \geqq \frac{450 \cdot 100}{4 - \frac{1}{6}\, 3^3} = 2500$ kg qcm sein, setzt das Verhältniss $K_b : K_z = 2500 : 1200 = 2{,}08 : 1$ voraus. Das ist entschieden viel zu hoch. Verfasser erhielt unter den bezeichneten Umständen niemals einen so grossen Werth, vielmehr immer nur Grössen, welche nahe bei 1,5 : 1 lagen. Wie man zu der Annahme eines so fehlerhaften Verhältnisses gelangt sein dürfte auseinander zu setzen, ist hier nicht der Ort.

Diese Erscheinung lässt sich erklären einmal durch den Einfluss etwa vorhandener Gussspannungen und zweitens dadurch, dass der Dehnungskoefficient für das Gusshautmaterial geringer ist, wie derjenige für das weiter nach dem Innern des Stabes zu gelegene Gusseisen. Für die letztere Erklärung spricht insbesondere die Beobachtung, dass die Durchbiegungen, namentlich die bleibenden, bei den bearbeiteten Stäben verhältnissmässig weit grösser sind als bei den unbearbeiteten. Die geringere Nachgiebigkeit der an und für sich am stärksten beanspruchten äusseren Fasern hat zur Folge, dass die Festigkeit der inneren Fasern weniger ausgenützt wird.

Die Grösse des hiermit festgestellten Einflusses der Gusshaut auf die Biegungsfestigkeit hängt jedenfalls auch z. B. davon ab, ob die Gussstücke in frischem Sand oder in getrockneten Formen gegossen werden. Unter Umständen wird dieser Einfluss sehr bedeutend werden können[1]).

Demgemäss ergiebt sich der Koefficient μ_0 der Gleichung 77 für unbearbeitete Stäbe kleiner als für bearbeitete. Den Werthen in Spalte 6 würde ein Werth im Mittel reichlich 1 entsprechen, d. i. nahezu $^1/_6$ kleiner als für die bearbeiteten Stäbe.

IV. Knickung.

§ 23. Wesen der Knickung.

Es sei AB, Fig. 72, ein prismatischer Stab von grosser Länge und geringen Querschnittsabmessungen, belastet durch die Kraft P. Wenn nun die Voraussetzungen,

1. dass die Kraft P genau mit der Stabachse zusammenfällt,
2. dass diese thatsächlich eine gerade Linie bildet, dass das Material des Stabes durchaus gleichartig ist und an allen Stellen in dem gleichen Zustande sich befindet,
3. dass seitliche Kräfte auf den Stab nicht einwirken, dass derselbe überhaupt Einflüssen, welche solche hervorrufen würden, nicht unterworfen ist,

[1]) Hieraus folgt, dass nur bearbeitete Stäbe der Prüfung unterworfen werden sollten, falls man Zahlen erhalten will, welche unter sich mit Berechtigung verglichen werden können.

zuträfen, so würde der Stab nach § 11 nur eine Zusammendrückung in Richtung der Achse und senkrecht dazu eine Querschnittsvergrösserung erfahren. Eine Veranlassung, mit dem freien Ende seitlich auszuweichen, läge dann nicht vor.

In Wirklichkeit sind die genannten Voraussetzungen, namentlich diejenigen unter Ziff. 1 und 2 genau überhaupt nicht zu erfüllen und angenähert um so weniger leicht, je grösser die Länge des Stabes im Verhältniss zu seinen Querschnittsabmessungen ist. Infolgedessen zeigt die Erfahrung, dass ein solcher Stab mit seinem freien Ende auszuweichen bestrebt ist, dass er eine Biegung erleidet. Um uns über das, was hierbei eintritt, ein richtiges Bild zu verschaffen, führen wir folgende Versuche durch.

a) Wir nehmen einen sorgfältig gerade gerichteten Stahldraht von 3,5 mm Durchmesser, spannen denselben möglichst genau senkrecht in den Schraubstock so ein, dass er eine freie Länge von $l = 850$ mm besitzt, Fig. 73. Hierauf belasten wir ihn in Richtung seiner Achse mit $P = P_1 = 0{,}4$ kg. Sobald Draht und Belastung sich selbst überlassen werden, beginnt das freie Ende des ersteren auszuweichen, bis er bei $y' =$ rund 25 mm zur Ruhe gelangt. In dieser Lage befindet sich das biegende Moment Py' (sofern von dem Einfluss des Eigengewichtes des Drahtes abgesehen wird) im

Fig. 72.

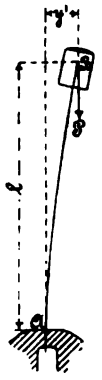


Fig. 73.

Fig. 74.

Gleichgewicht mit den durch dasselbe im Innern des Stabes wachgerufenen Elasticitätskräften. Die wiederholte Zurückführung des ausgewichenen Drahtes in die senkrechte Lage erwidert derselbe durch erneute Ausbiegung um y'. Wird das freie Ende des Stabes mit der Hand noch etwas weiter, d. h. um mehr als y' ausgebogen und

alsdann sich selbst überlassen, so kehrt er in die Lage $y' = 25$ mm zurück. Der Gleichgewichtszustand ist demnach ein stabiler.

Die Belastung $P_1 = 0{,}4$ kg wird entfernt und durch $P = P_2 = 1{,}1$ kg ersetzt. Sobald der Drahtstab mit der Belastung sich selbst überlassen bleibt, beginnt das freie Ende auszuweichen, der Draht biegt sich fortgesetzt, bis das belastende Gewicht die Werkbank, an welcher der Schraubstock befestigt ist, erreicht hat, Fig. 74.

Die Biegung ist naturgemäss an der Einspannstelle am stärksten. Der Stab ist hierbei nicht gebrochen. Nach der Entlastung verschwindet ein ziemlich bedeutender Theil der erlittenen Formänderung wieder; namentlich erlangt die nach dem freien Ende hin gelegene Strecke die Geradlinigkeit wieder.

b) Ein schlanker Holzstab von quadratischem Querschnitt, Seitenlänge 7,5 mm, wird möglichst genau senkrecht in den Schraubstock gespannt, alsdann am freien Ende mit $P = P_1 = 1{,}1$ kg belastet, wobei $l = 850$ mm. Das freie Ende beginnt auszuweichen und gelangt schliesslich bei $y' =$ rund 150 mm zur Ruhe.

Die Belastung $P_1 = 1{,}1$ kg wird entfernt und durch $P = P_2 = 1{,}3$ kg ersetzt. Der hierauf sich selbst überlassene Stab beginnt mit dem freien Ende auszuweichen, auch nach wiederholter Zurückführung in die senkrechte Lage, und biegt sich, bis er bei y' etwa gleich 550 mm bricht.

Die Erscheinungen, welche die beiden Stäbe bei der Belastung mit $P = P_2$ zeigen, werden unter dem Namen Knickung des Stabes zusammengefasst: im ersten Falle tritt eine Biegung ein, welche — abgesehen von der Möglichkeit, dass es sich um eine Feder handelt — mit dem Zwecke des Stabes, ein widerstandsfähiger Konstruktionstheil zu sein, unvereinbar ist; im zweiten Falle erfolgt ein Bruch, der gleichfalls unzulässig erscheint.

Aus den Versuchen a und b erkennen wir Folgendes.

Bei der Belastung P_1 weicht der Stab nur um y' aus und gelangt zur Ruhe. Wird das freie Ende des Stabes mit der Hand noch etwas weiter ausgebogen und sich dann selbst überlassen, so kehrt er in diese Lage zurück. In derselben herrscht demnach stabiles Gleichgewicht zwischen dem biegenden Moment, welches die auf den Stab wirkenden äusseren Kräfte, d. h. die Schwerkräfte der Belastung und der eigenen Masse, liefern und den hierdurch im Innern des Stabes wachgerufenen Elasticitätskräften. Bei der Belastung P_2 dagegen besteht überhaupt ein Gleichgewichtszustand

nicht, der Stab biegt sich aus, bis die Belastung zum Aufruhen gelangt, also zum Theil aufgehoben wird (Versuch *a*), beziehungsweise bis sie zum Bruche führt (Versuch *b*). In beiden Fällen muss es hiernach eine zwischen P_1 und P_2 gelegene Belastung $P = P_0$ geben, für die der stabile Gleichgewichtszustand, welcher bei $P = P_1$ noch zu beobachten war, gerade aufhört, zu bestehen.

Diese Kraft P_0 wird als Knickbelastung bezeichnet.

§ 24. Knickbelastung.

(Euler'sche Gleichung.)

Für den Stab Fig. 75 bezeichne

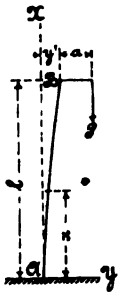


Fig. 75.

- P die in der Richtung der ursprünglich geraden Stabachse wirkende Kraft,
- P_0 die Knickbelastung, d. i. diejenige Grösse von P, welche die Knickung herbeizuführen im Stande ist,
- Θ das der Biegung gegenüber in Betracht kommende Trägheitsmoment des Stabquerschnittes (in der Regel das kleinere der beiden Hauptträgheitsmomente),
- l die Länge des Stabes,
- α den Dehnungskoefficienten.

In Bezug auf den durch den Abstand x bestimmten Querschnitt ist, da die zu x gehörige Ordinate der elastischen Linie y beträgt, das biegende Moment, dessen Ebene den Querschnitt in einer der beiden Hauptachsen schneide,

$$M_b = P(a + y' - y)$$

und damit nach Gleichung 41

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\alpha P}{\Theta}(a + y' - y).$$

Wird gesetzt

$$\frac{\alpha P}{\Theta} = n^2 \qquad a + y' - y = -z,$$

so folgt

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2} = -n^2 z.$$

Dieser Gleichung entspricht unter Voraussetzung, dass α und Θ konstant sind, das Integral

$$z = C_1 \sin(n x) + C_2 \cos(n x)$$

oder

$$y - a - y' = C_1 \sin(n x) + C_2 \cos(n x),$$

sofern die beiden Integrationskonstanten mit C_1 und C_2 bezeichnet werden. Dieselben sind bestimmt dadurch, dass für den Punkt A, also für $x = 0$

$$y = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = 0,$$

d. h.

$$C_2 = -a - y' \qquad C_1 = 0.$$

Hiermit folgt

$$y = (a + y')[1 - \cos(n x)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 78)$$

Für $x = l$ wird $y = y'$, also

$$y' = (a + y')[1 - \cos(n l)]$$

$$y' = a \frac{1 - \cos(n l)}{\cos(n l)} = a \left[\frac{1}{\cos(n l)} - 1\right]$$

$$= a \left[\frac{1}{\cos\left(l \sqrt{\frac{\alpha P}{\Theta}}\right)} - 1\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 79)$$

und damit findet sich die Gleichung der elastischen Linie

$$y = a \frac{1 - \cos(n x)}{\cos(n l)} = a \frac{1 - \cos\left(x \sqrt{\frac{\alpha P}{\Theta}}\right)}{\cos\left(l \sqrt{\frac{\alpha P}{\Theta}}\right)} \quad . \quad . \quad 80)$$

Denken wir beispielsweise die Gleichung 79 angewendet auf einen schmiedeisernen Stab von 100 cm Länge und 1 cm Durchmesser, so findet sich mit

$$\alpha = \frac{1}{2000000} \qquad \Theta = \frac{\pi}{64} d^4 = \sim \frac{1}{20} d^4 = \frac{1}{20} \qquad l = 100$$

$$y' = a \left[\frac{1}{\cos 100 \sqrt{\frac{20\,P}{2000000}}} - 1 \right] = a \left[\frac{1}{\cos \sqrt{\frac{P}{10}}} - 1 \right].$$

Für den Hebelarm a wollen wir uns einen kleinen Betrag vorstellen, etwa daher kommend, dass der Stab schon ursprünglich nicht genau gerade war und dass P nicht genau durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht.

Es ergiebt sich

für $P = 5$ kg $\quad y' = a \left(\frac{1}{\cos 0{,}707} - 1 \right) = 0{,}32\,a,$

für $P = 10$ kg $\quad y' = a \left(\frac{1}{\cos 1} - 1 \right) = 0{,}85\,a,$

für $P = 15$ kg $\quad y' = a \left(\frac{1}{\cos 1{,}225} - 1 \right) = 1{,}95\,a,$

für $P = 20$ kg $\quad y' = a \left(\frac{1}{\cos 1{,}4142} - 1 \right) = 5{,}54\,a,$

für $P = 22{,}5$ kg $\quad y' = a \left(\frac{1}{\cos 1{,}5} - 1 \right) = 13{,}16\,a.$

Wir erkennen, dass y' anfangs langsam, dann aber ausserordentlich rasch mit P wächst; für $P = 24{,}674$ kg wird sogar

$$y' = a \left(\frac{1}{\cos 1{,}5708} - 1 \right) = a \left(\frac{1}{0} - 1 \right) = a \,.\, \infty = \infty.$$

Wie klein also auch a sein mag — sofern es nur nicht Null ist —, für $P = 24{,}674$ kg beträgt $y' = \infty$. Erreicht demnach P diesen Werth, so wird bei der geringsten Abweichung der Belastung von der Stabachse, oder bei nicht vollkommener Geradlinigkeit derselben, oder bei nicht vollständiger Gleichartigkeit des Stabmaterials, oder endlich bei der geringsten seitlichen Einwirkung auf den Stab, dieser umknicken, das Gleichgewicht zwischen der äusseren Kraft P und den inneren Elasticitätskräften wird aufhören, zu bestehen.

Dieser Werth von P kann demnach als diejenige Kraft bezeichnet werden, welche im Stande ist, die Knickung herbeizuführen und welche sie auch herbeiführen wird, da die Voraussetzungen unter Ziff. 1 und 2 in § 23 nicht streng erfüllbar sind und deshalb stets ein biegendes Moment vorhanden sein muss. Diese Kraft ist die Knickbelastung P_0.

Allgemein lässt sich dieselbe aus der Gleichung 79 durch die Erwägung bestimmen, dass

$$P = P_0 \quad \text{für} \quad y' = a \,.\, \infty,$$

d. h.

$$\cos\left(l\sqrt{\frac{\alpha P_0}{\Theta}}\right) = 0$$

$$l\sqrt{\frac{\alpha P_0}{\Theta}} = \frac{\pi}{2}$$

$$P_0 = \frac{\pi^2}{4}\,\frac{1}{\alpha}\,\frac{\Theta}{l^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 81)$$

Für den Fall der Fig. 76, nach Massgabe welcher der Stab gezwungen ist, mit seinen sonst beweglichen Enden A und B in der ursprünglich geraden Stabachse zu bleiben, verhält sich jede der beiden Stabhälften genau so, wie der ganze Stab in Fig. 75. Demnach ergiebt sich für die Kraft, durch welche hier die Knickung erfolgen wird, mittelst Einführung von $0{,}5\,l$ in die Gleichung 81 an Stelle von l

Fig. 76.

$$P_0 = \frac{\pi^2}{4}\,\frac{1}{\alpha}\,\frac{\Theta}{(0{,}5\,l)^2} = \pi^2\,\frac{1}{\alpha}\,\frac{\Theta}{l^2}, \quad . \quad . \quad 82)$$

d. i. ein viermal so grosser Werth, wie für den Stab mit freiem Ende.

Die Beziehung 82 wird nach ihrem Urheber als die Euler'sche Gleichung bezeichnet.

Wenn der Stab, Fig. 77, an beiden Enden A und B so eingeklemmt ist, dass bei etwaiger Ausbiegung die Gerade AB Tangente in den Punkten A und B der elastischen Linie bleibt — was übrigens in Wirklichkeit nur sehr selten zutreffen wird (vergl.

§ 53) —, so liegen in den Mitten C und E der Stabstrecken AD und BD Wendepunkte. Die hierdurch entstehenden Endstücke AC und BE verhalten sich wie der ganze Stab im Falle der Fig. 75 ($a = 0$ gesetzt), während das Mittelstück CDE dem Stabe in Fig. 76 entspricht. Diese Erwägung ergiebt für die beiden Endstücke je von der Länge $\frac{l}{4}$ nach Gleichung 81

Fig. 77.

$$P_0 = \frac{\pi^2}{4}\frac{1}{\alpha}\frac{\Theta}{\left(\frac{l}{4}\right)^2} = 4\pi^2\frac{1}{\alpha}\frac{\Theta}{l^2},$$

für das Mittelstück, dessen Länge $\frac{l}{2}$ nach Gleichung 82,

$$P_0 = \pi^2\frac{1}{\alpha}\frac{\Theta}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = 4\pi^2\frac{1}{\alpha}\frac{\Theta}{l^2}.$$

Folglich gilt für den ganzen Stab, Fig. 77,

$$P_0 = 4\pi^2\frac{1}{\alpha}\frac{\Theta}{l^2}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 83)$$

Hiernach verhalten sich die Knickbelastungen für die Stäbe Fig. 75, 76 und 77, unter sonst gleichen Verhältnissen wie

$$\frac{\pi^2}{4}\frac{1}{\alpha}\frac{\Theta}{l^2} : \pi^2\frac{1}{\alpha}\frac{\Theta}{l^2} : 4\pi^2\frac{1}{\alpha}\frac{\Theta}{l^2} = 1 : 4 : 16.$$

Die 3 Gleichungen 81 bis 83 lassen sich zusammenfassen in die eine

$$P_0 = \omega\frac{1}{\alpha}\frac{\Theta}{l^2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 84)$$

worin

$$\left.\begin{aligned} &\omega = \frac{\pi^2}{4} \text{ für die Befestigungsweise Fig. 75,}\\ &\omega = \pi^2 \text{ für diejenige Fig. 76 und}\\ &\omega = 4\pi^2 \text{ für diejenige Fig. 77.}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 85)$$

§ 25. Zulässige Belastung gegenüber Knickung.

Als zulässige Gesammtbelastung P der in § 24 besprochenen Stäbe wird der $\mathfrak{S}$-te Theil von P_0 genommen, d. h.

$$P = \frac{P_0}{\mathfrak{S}}.$$

Insbesondere

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für Stab Fig. 75} & P = \dfrac{\pi^2}{4\,\mathfrak{S}}\,\dfrac{1}{\alpha}\,\dfrac{\Theta}{l^2}, \\ \text{„ „ „ 76} & P = \dfrac{\pi^2}{\mathfrak{S}}\,\dfrac{1}{\alpha}\,\dfrac{\Theta}{l^2}, \\ \text{„ „ „ 77} & P = \dfrac{4\,\pi^2}{\mathfrak{S}}\,\dfrac{1}{\alpha}\,\dfrac{\Theta}{l^2}, \end{array}\right\} \quad . \; . \quad 86)$$

oder allgemein

$$P = \frac{\omega}{\mathfrak{S}}\,\frac{1}{\alpha}\,\frac{\Theta}{l^2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 87)$$

worin ω einen von der Befestigungsweise der Stabenden abhängigen Koefficienten, den Befestigungskoefficienten bedeutet, dessen Grösse für bestimmte Fälle am Schlusse von § 24 angegeben ist. Hinsichtlich $\omega = 4\,\pi^2$ sei nochmals darauf hingewiesen, dass es nur äusserst selten der Wirklichkeit entsprechen wird, den Stab als beiderseits eingespannt anzusehen (vergl. § 53).

Die Benützung der Gleichungen 86 oder 87 bei Feststellung der Querschnittsabmessungen einer Stütze kommt nach Massgabe des Erörterten darauf hinaus, diese so zu wählen, dass erst durch das $\mathfrak{S}$-fache der wirkenden Kraft P die Knickung herbeigeführt wird. Mehr ist hierdurch zunächst nicht erreicht. Insbesondere erscheint es unzutreffend, bei Verwendung dieser Gleichungen zu schliessen, dass erst durch das $\mathfrak{S}$-fache der Kraft P die Möglichkeit einer Biegung eintreten würde. Die beiden, oben unter a und b angegebenen Versuche zeigen deutlich eine ganz bedeutende Ausbiegung bei $P = P_1 < P_0$. Die tägliche Erfahrung lehrt ebenfalls, dass Ausbiegung von schlanken Stäben schon bei verhältnissmässig sehr geringer Belastung eintritt. (Vergl. auch die in § 27 unter Ziff. 1 am Schlusse von a gemachten Angaben.) Aus der Unmöglichkeit, die in § 23 unter Ziff. 1 und 2 angegebenen Voraussetzungen genau zu erfüllen, was darauf hinauskommt, dass

die Grösse a in Gleichung 79 grösser als Null ist, erklärt sich diese Erscheinung ohne Weiteres.

Will man das Eintreten solcher weit unterhalb der Knickungsgefahr liegenden Ausbiegungen nach Möglichkeit verhindern, so wird das unter sonst gleichen Verhältnissen um so erfolgreicher geschehen, je grösser man $\mathfrak{S}$ in die Gleichungen 86 oder 87 einführt.

Bei gewissen stangenartigen Maschinentheilen wechseln Zug und Druck, so dass die Stange zunächst auf Zug, hierauf auf Knickung beansprucht ist u. s. f. Folgen nun — wie häufig der Fall — Zug und Druck so rasch auf einander, dass von einer Ausbildung der Formänderung, wie sie die Entwicklung der Gleichungen voraussetzen, nicht die Rede sein kann, so wird ein geringerer Werth von $\mathfrak{S}$ genügen, als wenn der genannte Vorgang langsamer vor sich geht[1]).

Ferner kommt in Betracht, dass in den meisten Fällen selbst der Anordnung Fig. 76 schon in Folge der Reibung in den Gelenken bei A und B ein (wenn auch nicht bedeutendes) Biegungsmoment vorhanden zu sein pflegt. Bei nicht senkrechter Lage der Stange tritt noch hinzu der auf Biegung wirkende Einfluss des Eigengewichts und im Falle ungleichförmiger Bewegung noch derjenige des Trägheitsvermögens. Nicht selten wird der Wärmezustand des Stabes ein einseitig verschiedener sein, welcher Umstand für eiserne Stützen Bedeutung erlangen kann. Auch diesen Einflüssen, wenn sie sich innerhalb gewisser Grenzen halten, wird in der Regel bei Wahl von $\mathfrak{S}$ Rechnung getragen.

Unter diesen Verhältnissen ist es natürlich ausgeschlossen, dass für $\mathfrak{S}$ ein bestimmter Werth angegeben werden kann; es werden vielmehr jeweils die besonderen Umstände in Erwägung zu ziehen sein. Hierzu gehört insbesondere auch die Befestigung der Enden der gedrückten Stange. Eine Säule mit grosser und kräftiger Fuss- und Kopfplatte wird sich anders verhalten, als eine sonst gleiche Säule mit kleinen Endplatten. Die erstere Säule erscheint in höherem Masse als an den Enden eingespannt, wie die letztere, und insofern tragfähiger; dagegen wird die belastende Kraft um so mehr von der Achse der Säule abweichen, d. h. die

[1]) Vergl. z. B. des Verfassers Maschinenelemente, 1881, S. 311, oder 1891/92. S. 493.

Säule voraussichtlich mit einem um so grösseren Hebelarm belasten können, je grösser die Kopf- und die Fussplatte sind (vergl. auch Fig. 81, S. 136). Bei Bleiunterlage wird sich die gleiche Säule leichter nach Fig. 76 krümmen können, als wenn sie mit Cement untergossen worden ist, der vor der Einwirkung der Belastung genügend erhärtet, u. s. w. Streng genommen wäre allerdings diesen Umständen bei Feststellung des Befestigungskoefficienten ω Rechnung zu tragen; doch kommt es, da P proportional dem Quotienten $\omega : \mathfrak{S}$, thatsächlich auf dasselbe hinaus, wenn ω, wie es für Stützen, deren Enden seitlich nicht ausweichen können, zu geschehen pflegt, mit π^2 eingeführt und $\mathfrak{S}$ entsprechend kleiner gewählt wird, falls man nicht, durch Erwägungen besonderer Art veranlasst, vorzieht, statt der ganzen Säulenlänge einen Bruchtheil derselben in Rechnung zu stellen. (Vergl. Schluss von § 27.)

Für Säulen von Gusseisen darf, ganz abgesehen von der selbstverständlichen Rücksichtnahme auf die Herstellungsweise (liegend oder stehend gegossen), nicht ausser Acht bleiben, dass α, welches bei der Entwicklung in § 24 als konstant vorausgesetzt wurde, thatsächlich veränderlich ist, und zwar zunimmt mit wachsender Spannung oder Dehnung (vergl. § 20, Ziff. 4), sowie überdies für die Gusshaut weniger beträgt als für das im Inneren gelegene Material (vergl. § 22, Ziff. 3).

Unter allen Umständen muss bei einem Stabe, welcher auf Knickung berechnet wird, die in § 12 aufgestellte Forderung bei einfacher Druckbeanspruchung

$$P \leqq kf \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 88)$$

befriedigt sein.

§ 26. Navier'sche (Schwarz'sche) Knickungsformel.

Die in den §§ 24 und 25 erörterte Grundgleichung zur Berechnung eines Stabes, welcher der Gefahr des Knickens ausgesetzt ist, hat bis auf unsere Tage in den Kreisen der Techniker des Hochbau- und Bauingenieurwesens vielfach Bemängelung erfahren, deren Wurzel namentlich in dem Umstande zu suchen sein dürfte, dass in ihr nicht die Spannung auftritt, welche man sich gewöhnt hat, als Massstab der Sicherheit einer Konstruktion aufzufassen und

von der man deshalb bei Feststellung der Abmessungen immer auszugehen pflegt[1]).

[1]) Im Maschineningenieurwesen war nichts oder verhältnissmässig nur wenig von einer solchen Bemängelung zu bemerken und zwar aus verschiedenen Gründen.

Zunächst hat der Gleichgewichtszustand, wie er im Augenblicke des Beginnes der Knickung vorhanden ist, für den Maschineningenieur nichts Fremdes. Es ist demselben geläufig, dass schon die Herstellung eines längeren schlanken Körpers mit thatsächlich gerader Achse und vollständiger Gleichartigkeit des Materials trotz grösster Sorgfalt nicht zu erzielen ist, und dass infolgedessen, ganz abgesehen davon, mit welcher Genauigkeit es möglich erscheint, die Achsialkraft P in die vermeintlich gerade Stabachse fallen zu lassen, bei Belastung durch P eine mit dieser Kraft wachsende Durchbiegung eintreten muss. (Lange Druckstangen, wie sie z. B. bei vertikalen Balanciermaschinen auftreten, sind deshalb auch bei genau senkrechter Lage niemals durchbiegungsfrei zu erhalten, die Erzitterungen lassen sich bei wechselnder Belastung nicht ganz beseitigen.) Dass bis zu einer gewissen Grösse von P das mit dieser Kraft und dem Eigengewicht verknüpfte biegende Moment von den inneren Elasticitätskräften des Stabes im Gleichgewicht gehalten wird, und dass bei Ueberschreitung der bezeichneten Grenze dieses Gleichgewicht aufhört und der Stab sich umbiegt oder zerbricht, erscheint dann ganz natürlich. Durch Steigerung der Belastung wird der Stab auf einfachstem Wege aus dem Zustand des stabilen Gleichgewichts in den des labilen übergeführt. An den Letzteren muss sich dann schon infolge des Einflusses der Zeit auf die Ausbildung der Formänderungen der Vorgang des Knickens anschliessen.

Das Verhalten des unter äusserem Ueberdruck stehenden Flammenrohres eines Dampfkessels, Fig. 78, ist ein ganz entsprechendes. Erfährt die Pressung

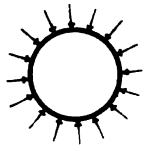


Fig. 78.

der Flüssigkeit, welche das Rohr umgiebt, eine Steigerung, so wird das Letztere schliesslich eingedrückt oder zusammengedrückt. Eine eigentliche Zerstörung des Materials tritt hierbei häufig nicht ein. Die Grösse der Pressung, welche das Ein- oder Zusammendrücken herbeiführt, hängt in erster Linie mit ab von der Vollkommenheit der Kreisform des Rohrquerschnittes. In ganz gleicher Lage befinden sich nicht wenige Gefässe und Rohrleitungen der Industrie, welche der Regel nach oder auch nur ausnahmsweise äusserem Ueberdruck Widerstand zu leisten haben.

In solchen Fällen sind eben die Abmessungen so zu wählen, dass unzulässige Formänderungen ferngehalten werden. Allgemein von einer zulässigen Spannung auszugehen, erscheint dann unzutreffend. Die üblichen

Ferner zeigten die Ergebnisse von Knickungsversuchen keine Uebereinstimmung mit dem, was die Euler'sche Gleichung

$$P_0 = \pi^2 \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 82)$$

lieferte[1]).

Sicherheitskoefficienten $\mathfrak{S}$ haben, wie oben (§ 25) bereits erörtert, hierbei den allgemeinen Rücksichten und den besonderen Umständen des gerade vorliegenden Falles Rechnung zu tragen.

Im Maschinenbau ist auch in anderen Fällen als bei Knickbeanspruchung von einer höchstens zulässigen Formänderung auszugehen, selbstverständlich unter Festhaltung der Forderung, dass die Anstrengung des Materials in keinem Punkte den höchstens für zulässig erachteten Werth überschreitet. Bei stark belasteten Wellen u. s. w. gestattet man nur eine bestimmte Durchbiegung oder eine gewisse Abweichung der Richtung der elastischen Linie von der ursprünglich geraden Stabachse an bestimmten Stellen; in anderen Fällen wird von einer höchstens zulässigen Verdrehung ausgegangen. Die zulässigen Belastungen unserer Treibriemen u. s. w. bezwecken, die Dehnungen innerhalb gewisser Grenzen zu halten u. s. f. Andererseits werden Federn u. dergl. so konstruirt, dass mit Sicherheit auf eine gewisse Formänderung gerechnet werden darf. (Vergl. des Verfassers Maschinenelemente 1881, Vorwort S. IV, S. 35, 37, 202, 279, 317 u. s. f., oder 1891/92, Vorwort S. IV, VIII, S. 61, 64, 232, 317, 318, 323 u. f., S. 427 u. f. S. 498, 504, 540 u. s. w.)

Die oben erwähnten Bemängelungen der Euler'schen Gleichung in den Kreisen des Baufachs haben von H. Zimmermann im Centralblatte der Bauverwaltung 1886, S. 217 u. f. eine klare und eingehende Beleuchtung erfahren.

[1]) Man übersah hierbei, dass, während die Entwicklung dieser Gleichung freie Beweglichkeit der Stabenden voraussetzt (Fig. 76), bei den Versuchen diese freie Beweglichkeit nicht vorhanden war. Hätte man in der Erwägung, dass die vollständige Aufhebung dieser Beweglichkeit, d. i. die Einspannung des Stabes, dazu führt, in Gleichung 82 an Stelle der Länge l nur deren Hälfte einzusetzen, in jedem einzelnen Fall zu ermitteln gesucht, welcher Bruchtheil von l oder welcher Werth von ω in Gl. 84 (Gl. 87) den Befestigungsverhältnissen der Stabenden ungefähr entsprochen haben würde, das Ergebniss würde ein anderes gewesen sein.

Auch der Einfluss der Veränderlichkeit des Dehnungskoefficienten des Gusseisens, derjenige der Gusshaut und etwaiger Gussspannungen durften bei der Beurtheilung der Versuchsergebnisse, welche gusseiserne Stützen lieferten, nicht übersehen werden (vergl. § 20, Ziff. 4 und § 22).

Die Versuche von Bauschinger und v. Tetmajer (§ 27) liefern den Nachweis, dass der Werth

$$P_0 = \pi^2 \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2}$$

der Knickbelastung bei freier Beweglichkeit der Stabenden entspricht.

Auf diesem Boden war die von Navier herrührende Knickungsformel

$$P = f\frac{k}{1+\varkappa\frac{fl^2}{\Theta}} = f\frac{k}{1+\varkappa\left(\frac{l}{r}\right)^2} \quad \ldots \quad 89)$$

entstanden[1]).

Hierin bedeutet

P die zulässige Gesammtbelastung des Stabes,
k die zulässige Druckanstrengung des Materials,
f den Querschnitt des Stabes,
l dessen Länge,
Θ das kleinere der beiden Hauptträgheitsmomente des Stabquerschnittes,
r den Trägheitshalbmesser derart, dass $\Theta = fr^2$,
$\varkappa$ eine Erfahrungszahl, den sogenannten Zerknickungskoefficienten.

Die von Navier dem Wesen nach gegebene Begründung erhellt aus dem Folgenden.

Der in Fig. 79 gezeichnete Stab ist im mittleren Querschnitt durch das Moment Pa, dessen Ebene den Letzteren senkrecht zu derjenigen Hauptachse schneidet, für welche Θ gilt, auf Biegung und durch die Kraft P auf Druck in Anspruch genommen; infolgedessen erfährt die im Abstande e von der Nullachse gelegene Faserschicht eine Pressung

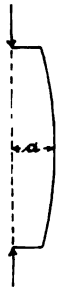


Fig. 79.

$$k = \frac{P}{f} + \frac{Pa}{\Theta}e$$

woraus

[1]) Rühlmann stellt in seinem Werk: Vorträge über Geschichte der technischen Mechanik, Leipzig 1885, S. 364 und 365 fest, dass diese Gleichung, welche auch als Gordon'- und Rankine'sche Formel bezeichnet wird, von Navier zuerst entwickelt wurde, dass später 1854 Schwarz sie in anderer Weise ableitete u. s. f.

Sie hat, wenn es sich darum handelt, ihre Richtigkeit durch die Ergebnisse von Knickungsversuchen zu prüfen, den Vortheil, zwei Koefficienten k und $\varkappa$ zu besitzen, durch deren Wahl leichter eine Anschmiegung der Versuchsergebnisse erreicht werden kann, als wenn nur ein Koefficient vorhanden ist.

Die Euler'sche Gleichung 82 ist in dieser Hinsicht allerdings weniger gut daran.

$$P = f \frac{k}{1 + \frac{a e f}{\Theta}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 90)$$

In dieser Gleichung tritt die Unbekannte a auf, deren Zweck nach § 23 darin zu bestehen hat, die Möglichkeit des excentrischen Angreifens der Kraft P bei auf Knickung in Anspruch genommenen Stäben, sowie die Ungleichartigkeit des Materials, die etwaige Verschiedenartigkeit des Wärmezustandes u. s. w. und den Umstand zu berücksichtigen, dass die Stabachse keine genau gradlinige ist. Um diese — offenbar ausserhalb des Rahmens der wissenschaftlichen Elasticitäts- und Festigkeitslehre liegende — Grösse nicht willkürlich wählen zu müssen, worin überhaupt die hauptsächlichste Schwierigkeit bei der Berechnung eines auf Knickung beanspruchten Stabes liegt, hat Navier folgender Erwägung stattgegeben.

Durch das Moment $P a$ (allein) tritt in den um e von der Nullachse abstehenden Fasern die Spannung

$$\sigma = \frac{P a}{\Theta} e$$

auf. Zu dieser Spannung oder Pressung gehört die Dehnung oder Zusammendrückung

$$\varepsilon = \alpha \sigma.$$

Hiermit wird aus der vorigen Gleichung

$$P = \varepsilon \frac{\Theta}{\alpha a e} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 91)$$

und durch Gleichsetzung dieses Werthes mit der rechten Seite von Gleichung 82

$$P = \varepsilon \frac{\Theta}{\alpha a e} = \pi^2 \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2},$$

woraus folgt

$$a = \varepsilon \frac{l^2}{\pi^2 e}.$$

Durch Einführung dieses Werthes in die Gl. 90 findet sich

$$P = f \frac{k}{1 + \frac{\varepsilon f l^2}{\pi^2 \Theta}}.$$

Mit

$$\frac{\varepsilon}{\pi^2} = \varkappa$$

ergiebt sich

$$P = f\frac{k}{1+\varkappa\frac{f\,l^2}{\Theta}} = f\frac{k}{1+\varkappa\left(\frac{l}{r}\right)^2} \quad . \; . \quad 89)$$

wie oben.

Richtiger erscheint es, die Gleichung 91 nicht mit Gl. 82, sondern mit Gl. 87 in Verbindung zu setzen, so dass

$$P = \varepsilon\frac{\Theta}{\alpha a e} = \frac{\omega}{\mathfrak{S}}\frac{1}{\alpha}\frac{\Theta}{l^2},$$

woraus dann mit

$$\varkappa = \frac{\mathfrak{S}}{\omega}\varepsilon \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 92)$$

ebenfalls erfolgen würde

$$P = f\frac{k}{1+\varkappa\frac{f\,l^2}{\Theta}} = f\frac{k}{1+\varkappa\left(\frac{l}{r}\right)^2} \quad . \; . \; . \; . \quad 89)$$

Hiernach bedeutet der Koefficient $\varkappa$ das $\frac{\mathfrak{S}}{\omega}$ fache derjenigen Dehnung (Zusammendrückung), welche im massgebenden Faserabstande e vorhanden ist, insoweit dieselbe von dem biegenden Momente allein herrührt.

Die Einführung von $\varkappa$ als eines Erfahrungskoefficienten heisst demnach nichts Anderes, als die Festsetzung eines bestimmten Werthes für die Dehnung, insoweit diese durch das vorhandene biegende Moment hervorgerufen wird. Ob es leichter ist, $\varkappa = \frac{\mathfrak{S}}{\omega}\varepsilon$ anzunehmen, oder α unter Beachtung der besonderen Verhältnisse schätzungsweise zu wählen, mag hier dahingestellt bleiben.

Soll nun $\varkappa$ — wie unter dem Vorbehalt, die etwaige Veränderlichkeit des Befestigungskoefficienten besonders zu berücksichtigen, angegeben wird — eine vom Material abhängige Konstante sein, so wird damit festgesetzt, dass diese Dehnung (oder die ihr entsprechende Kantenspannung), soweit sie von der Biegung

herrührt, für ein bestimmtes Material konstant anzunehmen ist, also beispielsweise unter sonst gleichen Verhältnissen unabhängig davon, ob es sich um eine Stütze von 10 m Höhe oder um eine solche von 3 m Höhe handelt.

Greifen wir auf die Gründe zurück, welche überhaupt dazu veranlassten, die Grösse a einzuführen, so finden wir, dass diese Grösse folgenden Umständen Rechnung tragen sollte:

a) die Achse ist bei längeren Stäben keine gerade Linie,
b) das Material ist nicht vollkommen gleichartig, sein Zustand nicht an allen Stellen der gleiche,
c) die Kraft P fällt nicht genau mit der Stabachse zusammen.

Naturgemäss wachsen die Abweichungen unter a und b vom normalen Zustande mit der absoluten Länge der Stütze verhältnissmässig rasch, so dass nicht Unveränderlichkeit, sondern Abnahme der für das biegende Moment zugelassenen Kantendehnung oder Kantenspannung angezeigt erscheint. Knickungsversuche werden den Nachweis erbringen müssen, dass $\varkappa$ nicht konstant sein kann, sondern mit l zunehmen muss und zwar bedeutend, wenn schlanke hohe Stützen in das Bereich der Prüfung gezogen werden[1]).

Eine scharfe Betrachtung des Zweckes, zu dem überhaupt die Gleichung 89 dienen soll, sowie dessen, was von dem Zerknickungs-

---

[1]) Thatsächlich glaubte man, diesen Einfluss der Stützenhöhe bereits voll bei der Entwicklung der Gleichung 89) berücksichtigt zu haben.

Laissle & Schübler (Bau der Brückenträger, 4. Auflage, 1876, S. 70), welche wohl am meisten zur Verbreitung der Navier'schen Knickungsformel beigetragen haben dürften, ausgehend von der Gleichung 90

$$P = f \frac{k}{1 + \frac{a e f}{\Theta}},$$

setzen in der Erwägung, dass a „für ein und dasselbe Material mit zunehmender Länge sich sehr vergrössern, dagegen bei zunehmenden Querschnittsdimensionen abnehmen wird",

$$a = \varkappa \frac{l^2}{e},$$

„worin $\varkappa$ ein durch die Erfahrung für jedes Material festzustellender Koefficient ist", und erhalten damit

$$P = f - \frac{k}{1 + \varkappa \frac{f l^2}{\Theta}}.$$

koefficienten $\varkappa$ verlangt wird, führt zu der Erkenntniss, dass $\varkappa$ — selbst bei dem gleichen Werthe von ω — nicht blos Materialkonstante sein kann, sondern in der Hand eines rationell arbeitenden Konstrukteurs — falls derselbe die Gleichung 89 überhaupt benutzt — eine von verschiedenen Umständen zum Theil sehr stark beeinflusste Grösse sein muss. (Vergl. das in § 25 über $\mathfrak{S}$ Bemerkte.)

Laissle & Schübler setzen (S. 71 ihres Werkes „der Bau der Brückenträger", 4. Auflage, 1876) für an den Enden drehbare Stäbe (Fig. 76)

$\varkappa = 0{,}0001$ für Schmiedeisen (zutreffendenfalls auch für weichen Stahl),

$\varkappa = 0{,}0003$ für Gusseisen,

$\varkappa = 0{,}0002$ für Holz.

Es entspricht dies, wenn $\omega = \pi^2 = \sim 10$ genommen wird,

$$\varepsilon = \frac{0{,}001}{\mathfrak{S}},$$

bezw. $$\frac{0{,}003}{\mathfrak{S}},$$

bezw. $$\frac{0{,}002}{\mathfrak{S}}.$$

Scharowski giebt in seinem Musterbuch für die Säulen der Eisenkonstruktionen

	k_z (§ 6)	k (§ 12)	$\varkappa$
bei Schmiedeisen	1000 kg	1000 kg	0,0001,
bei Gusseisen	250 „	500 „	0,0002.

Wenn bei gusseisernen Säulen $\varkappa f l^2 : \Theta > 3$, so wählt Scharowski

$$P = \frac{250 f}{-1 + \varkappa \frac{f l^2}{\Theta}}.$$

Hierbei ist freie Beweglichkeit der Säulenenden nicht vorhanden, andererseits kann aber auch nicht Einspannung derselben angenommen werden.

Möller — Ueber die Widerstandsfähigkeit auf Druck beanspruchter eiserner Baukonstruktionstheile bei erhöhter Temperatur, von M. Möller und R. Lühmann, vom Vereine zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen mit einem Preise gekrönte Arbeit. Berlin 1888. Abdruck aus den Verhandlungen des Vereines zur Beförderung des Gewerbfleisses 1887 (siehe daselbst S. 603 u. f.) — empfiehlt für gusseiserne und schmiedeiserne Säulen, welche im Falle eines Brandes dem Feuer ausgesetzt sein können, zu nehmen

$$k = 1000 \text{ bis } 1200 \qquad \varkappa = 0{,}0004, \text{ d. i. } \varepsilon = \frac{0{,}0004}{\mathfrak{S}}\,\omega.$$

Krohn entwickelt im Centralblatt der Bauverwaltung 1885, S. 400 bis 401 für an den Enden bewegliche Säulen die Beziehung

$$\varkappa = \frac{1}{8}\,\alpha\, k,$$

worin α den Dehnungskoefficienten bedeutet.

Dies würde beispielsweise geben

für Schmiedeisen mit $\frac{1}{\alpha} = 2000000, \qquad k = 800$

$$\varkappa = 0{,}00005,$$

für Gusseisen mit $\frac{1}{\alpha} = 900000, \qquad k = 800$

$$\varkappa = 0{,}00011.$$

Ueber die Grösse $\varkappa$ vergleiche auch § 27.

§ 27. Knickungsversuche.

I. Versuche von Bauschinger.

Mittheilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der königl. technischen Hochschule in München, Heft 15, München 1887.

Von der grossen Anzahl von Versuchen mit Stützen aus ⊢⊣-, ⊔-, ⊥-, ⌊-Eisen greifen wir diejenigen heraus, welche sich auf Stäbe mit Querschnitten beziehen, die zwei Symmetrieachsen besitzen.

Material: Walzeisen. Querschnittsform: ⊢⊣.

a) Die Enden der Versuchsstäbe sind in Spitzen, also frei beweglich gelagert, Fig. 76.

No.	Querschnitt			Trägheitsmoment Θ	Länge l	Knickbelastung		Belastung auf 1 qcm $\sigma = P'_0 : f$	Abweichung $\frac{P'_0 - P_0}{P'_0} 100$
	Breite	Höhe	Inhalt f			beobachtet P'_0	berechnet $P_0 = \frac{\pi^2}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2}$		
	cm	cm	qcm	cm⁴	cm	kg	kg	kg	%
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	25,2	13,8	63,55	575,6	405,5	70 500	69 000	1105	+ 2
2	12,4	7,2	20,7	37,99	89	61 000	94 500	3035	s. u.
3	—	—	18,22	—	151	30 250	33 000	1662	— 9
4	—	—	18,22	—	223	17 250	15 000	948	+ 13
5	9,93	4,92	11,16	17,31	156,1	10 650	14 000	956	— 31
6	—	—	11,38	—	270	4 100	4 700	360	— 15
7	—	—	11,76	—	465	1 300	1 600	111	— 23
8	9,99	5,01	10,58	14,2	254,3	3 900	4 300	369	— 10
9	9,98	5,01	10,58	14,2	254,3	4 000	4 300	378	— 7,5
10	9,95	5,00	10,55	14,2	254,4	3 900	4 300	370	— 10
11	10,00	5,00	10,56	14,2	254,4	4 050	4 300	384	— 6
12	9,96	4,99	10,55	14,2	254,3	3 900	4 300	370	— 10

Bis auf den Versuch No. 2, welcher bei der Belastung von 3035 kg/qcm (Spalte 9) schon infolge der Anforderungen der einfachen Druckfestigkeit hier auszuscheiden hat (vergl. Schlussbemerkung zu § 25), also nicht in Betracht kommt, sind die Abweichungen zwischen den beobachteten Knickbelastungen P'_0 (Spalte 7) und den mit $\alpha = \frac{1}{2\,000\,000}$ berechneten Werthen P_0 (Spalte 8) durchschnittlich nicht so gross, dass das in der Gleichung

$$P_0 = \frac{\pi^2}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2}$$

ausgesprochene Gesetz als unzutreffend erschiene, namentlich wenn noch berücksichtigt wird, dass die Querschnittsform, welche hier vorliegt, gegenüber Knickung sich nicht ganz so sicher verhalten dürfte, wie dies die Entwicklung voraussetzt.

Hiernach ist in den Ergebnissen der vorstehenden Versuche eine Bestätigung des in Frage stehenden Gesetzes zu erblicken.

Zum Zwecke der Klarstellung, dass die Ausbiegungen schon bei verhältnissmässig sehr geringen Belastungen beginnen, sei ein Theil der auf den Versuchsstab No. 12 bezüglichen Ermittelungen angeführt.

Belastung P kg	$P:f$ kg	Ausbiegung der Mitte mm
0	0	0,00
200	19	0,00
400	38	0,04
600	57	0,11
800	76	0,20
1000	95	0,34
2000	190	1,25
3000	284	3,88
3200	303	5,08
3400	322	6,86
3600	341	9,92
3800	360	17,14

b) Die Versuchsstäbe liegen mit ihren ebenen Stirnseiten an den festen Druckplatten.

Hier gestalten sich die Vorgänge bei der Biegung weniger einfach, als unter a. Zu der Schwierigkeit, den Stab so einzuspannen, dass die Richtung der Druckkraft mit der Stabachse zusammenfällt, tritt die weitere hinzu, ein gleichmässiges Anlegen der Stirnflächen an die Druckplatten herbeizuführen und zu sichern. Die Erfüllung der letzteren Bedingung musste sich naturgemäss als unmöglich erweisen. Sobald der Stab seine Ausbiegung — etwa nach A, Fig. 80, hin — begonnen, hat er das Bestreben, sich bei

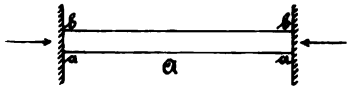


Fig. 80.

bb von den Druckplatten zu lösen. Damit aber muss dann eine Aenderung der Vertheilung des Druckes über die Stirnflächen eintreten: die Pressung wird hier von der Stabmitte aus gerechnet

nach a hin wachsen, nach b hin abnehmen. Thatsächlich beobachtete Bauschinger, dass sich am Schlusse des Versuches die Stirnflächen bis auf die bei a zusammengedrückten Kanten von den Druckplatten lösten, Fig. 81.

Bei dieser Sachlage erscheint es nicht wahrscheinlich, dass es möglich sein werde, für Stäbe, welche mit ihren ebenen Stirnflächen

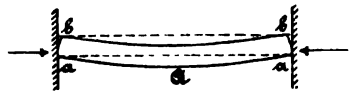


Fig. 81.

an festen Druckplatten anliegen, den Vorgang rechnerisch genau zu verfolgen. Bauschinger hat deshalb zum Zwecke der weiteren Betrachtung seiner Versuchsergebnisse die Navier'sche Gleichung 89 herangezogen, derart, dass in

$$P_o = f \frac{K}{1 + \varkappa \frac{\alpha f l^2}{\Theta}}$$

unter K die Druckfestigkeit verstanden und hierfür 4500 kg eingeführt wird. Dann findet sich

a) für die in Spitzen gelagerten Stäbe $\varkappa$ schwankend zwischen 0,00009 und 0,000614,

b) für die Stäbe mit flachen Enden $\varkappa$ schwankend zwischen 0,000041 und 0,00031,

d. i. überaus veränderlich.

Werden K und $\varkappa$ aus den Versuchsergebnissen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate berechnet, so ergiebt sich

a) $K = 2270$ $\quad \varkappa = 0{,}000058$,
b) $K = 3100$ $\quad \varkappa = 0{,}000029$.

Die für K gefundenen Werthe bestätigen die Richtigkeit der Schlussbemerkung des § 11. Die Fliess- oder Quetschgrenze war von Bauschinger für das untersuchte Eisen als schwankend zwischen 2150 und 3690 kg festgestellt worden.

Ferner weisen die Ergebnisse darauf hin, dass die aus Knickungsversuchen bestimmten Werthe $\varkappa$ ebenfalls mit einem Sicherheitskoefficienten multiplicirt in die Rechnung einzuführen sind, ganz wie das bei K geschieht, wie es auch oben bei der Entwicklung, welche die Gleichung 92 ergab, vorgenommen worden ist.

Die mit $K = 2270$ und $\varkappa = 0{,}000058$ berechneten Werthe P_0 für die Stäbe mit beweglichen Enden stimmen mit den beobachteten Werthen nicht gerade gut überein; besser ist dies der Fall bei den mit $K = 3100$ und $\varkappa = 0{,}000029$ ermittelten Werthen P_0 für die Stäbe mit flachen Enden.

Auf Grund der Bauschinger'schen Versuche kann geschlossen werden:

a) für Stäbe mit drehbaren Enden ist die Euler'sche Gleichung 82 zutreffend, sofern die Beziehung 88 befriedigt erscheint,

b) für Stäbe mit ebenen, an festen Druckplatten anliegenden Stirnflächen bietet die Navier'sche Knickungsformel 89 brauchbare Werthe.

2. Versuche von v. Tetmajer.

Schweizerische Bauzeitung 1887, Bd. X, S. 93 u. f.
„ „ 1888, Bd. XI, S. 110 u. f.

a) Versuche mit Schweiss- und Flusseisen in Rundstäben bis 5 cm Stärke.
(30 Stäbe Schweiss- und 30 Stäbe Flusseisen bearbeitet),
Einspannung der Versuchsstangen zwischen Spitzen.

v. Tetmajer fand:

1. Uebereinstimmung der beobachteten Knickbelastungen mit denjenigen, welche sich auf Grund der Euler'schen Gleichung berechnen liessen.
2. Veränderlichkeit des Zerknickungskoefficienten $\varkappa$, falls die Gleichung von Navier 89 zu Grunde gelegt wird;

es müsste dann sein

$$\varkappa = 0{,}0001 \sqrt{0{,}00867 \left(\frac{l}{r}\right)^2 - 0{,}6936}$$

in

$$\frac{P_0}{f} = \frac{2650}{1 + \varkappa \left(\frac{l}{r}\right)^2} \text{ für Flusseisen (2650 Fliessgrenze),}$$

$$\frac{P_0}{f} = \frac{2350}{1 + \varkappa \left(\frac{l}{r}\right)^2}$$ für Schweisseisen (2350 Fliessgrenze).

b) Versuche mit Bauhölzern.

	Dehnungs-koefficient.	Druck-festigkeit.	Bemerkungen.
Lärche und Föhre im Durchschnitt	$\frac{1}{104230}$	318 kg	astfreies Holz,
Roth- und Weisstanne		285 kg	astig.

v. Tetmajer stellte zunächst für die zwischen Spitzen gelagerten Stäbe fest:

1. das Gleiche wie unter a, Ziff. 1, genügend grosse Länge derselben vorausgesetzt,
2. die starke Veränderlichkeit von $\varkappa$, falls die Navier'sche Gleichung in Betracht gezogen wird:

$$\varkappa = 0{,}0001 \sqrt{0{,}05 \frac{l}{r} - 0{,}80}$$

in

$$\frac{P_0}{f} = \frac{318}{1 + \varkappa \left(\frac{l}{r}\right)^2}$$ für Lärche und Föhre,

$$\frac{P_0}{f} = \frac{285}{1 + \varkappa \left(\frac{l}{r}\right)^2}$$ für Roth- und Weisstanne.

Für die mit ebenen Stirnflächen an festen Druckplatten anliegenden Hölzer beobachtete v. Tetmajer den Abstand der Wendepunkte von einander zwischen 0,5 l_0 und 0,6 l_0, sofern l_0 die Entfernung der beiden Druckplatten ist. Er empfiehlt, um sicher zu rechnen, in den soeben gegebenen Gleichungen 0,6 l_0 für l einzuführen, im Uebrigen jedoch nichts zu ändern.

Was in § 26 aus der Natur von $\varkappa$ zu schliessen war, nämlich Wachsthum dieses Koefficienten mit zunehmendem Verhältnisse $l : r$, bestätigen die von v. Tetmajer sowohl für Holz, als auch für Eisen erlangten Versuchsergebnisse.

Zweiter Abschnitt.

Die einfachen Fälle der Beanspruchung gerader stabförmiger Körper durch Schubspannungen (Schiebungen).

Einleitung.

§ 28. Schiebung.

Die im Vorhergehenden (§ 1 bis § 27) betrachteten Aenderungen der Form waren Aenderungen der Länge (vergl. die §§ 1, 6, 11 u. s. f.). Damit sind die auftretenden Formänderungen jedoch noch nicht erschöpft, wie aus folgender Betrachtung erhellt.

Wir denken uns in dem von äusseren Kräften noch nicht ergriffenen Körper, welcher der Betrachtung unterworfen werden soll, einen kleinen Vierflächner (Fig. 82). Begrenzt von den drei in den Kanten OA, OB und OC sich rechtwinklig schneidenden Ebenen AOB, BOC, COA und der weiteren Ebene ABC, erscheint derselbe bestimmt durch die drei Kantenlängen OA, OB und OC, sowie durch die Kantenwinkel, welche die Ebenen der körperlichen Ecke mit einander bilden, nämlich

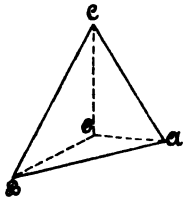


Fig. 82.

$\measuredangle\ BOC$ (an der Kante OA),
$\measuredangle\ COA$ („ „ „ OB),
$\measuredangle\ AOB$ („ „ „ OC).

Wenn nun jetzt auf den Körper äussere Kräfte, die sich an ihm das Gleichgewicht halten mögen, einwirken, so erleidet er in allen seinen Theilen Formänderungen. Hierbei werden auch die den Vierflächner bestimmenden Grössen sich ändern: die Kanten werden eine Aenderung ihrer Länge, die Kantenwinkel eine Aenderung ihrer Grösse erfahren.

Die Möglichkeit, dass die Ebenen AOB, BOC, COA und ABC in gekrümmte Flächen übergehen können, darf unter der Voraussetzung, dass der Vierflächner unendlich klein gedacht wird, unberücksichtigt bleiben, weil ein unendlich kleines Flächenelement — solche liegen dann in den vier Begrenzungsflächen vor — immer als eben angesehen werden kann, und weil die Aenderungen der Lage der vier Flächenelemente bereits durch die Aenderungen der Kanten und der Winkel bestimmt sind.

Hiernach treten zu den im Früheren allein betrachteten Aenderungen der Länge noch Winkeländerungen hinzu.

Zur Klarstellung des Wesens dieser Aenderungen denken wir uns einen Würfel $OADBCGFE$ (Fig. 83) von einer nach OA gerichteten, in der oberen Ebene $CGFE$ liegenden und über dieselbe

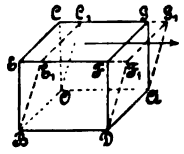


Fig. 83.

gleichmässig vertheilten Kraft ergriffen und unten (in der Ebene $OADB$) festgehalten. Dann wird sich die obere Begrenzungsebene $CGFE$ nach $C_1G_1F_1E_1$ verschieben, der rechte Winkel $EBD = \measuredangle COA$ wird in den spitzen Winkel $E_1BD = \measuredangle C_1OA$ übergehen, sich also um

$$\measuredangle EBE_1 = \measuredangle COC_1 = \gamma$$

ändern. Diese Winkeländerung ist bestimmt durch

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{\overline{EE_1}}{\overline{BE}} = -\frac{\overline{CC_1}}{\overline{OC}},$$

wofür unter Voraussetzung, dass es sich nur um kleine Aenderungen handelt, gesetzt werden darf

$$\gamma = -\frac{\overline{EE_1}}{BE} = \frac{\overline{CC_1}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{FF_1}}{DF} = \frac{\overline{GG_1}}{\overline{AG}}.$$

Dieser Quotient ist aber auch gleich der Verschiebung, welche unter den gleichen Verhältnissen eine in der Richtung OC um 1 von der Kante BO abstehende Ebene (abstehendes Flächenelement, abstehender Punkt) erfahren haben würde. Aus diesem Grunde wird die Aenderung γ des ursprünglich rechten Winkels auch als verhältnissmässige (specifische) Verschiebung und kurz als Schiebung oder Gleitung bezeichnet.

Zur weiteren Klarstellung der Schiebung γ werde noch die folgende Betrachtung angestellt.

Zwei ursprünglich unter rechtem Winkel sich schneidende Ebenen OX und OZ, Fig. 84, gelangen durch die Formänderung

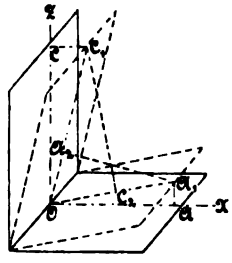


Fig. 84.

in die Lagen OA_1 und OC_1. Der ursprünglich rechte Winkel XOZ hat sich hierbei geändert um die Winkel XOA_1 und ZOC_1, deren Tangenten betragen

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{OA}}, \quad \text{bezw.} \quad \frac{\overline{CC_1}}{\overline{OC}},$$

wenn A_1A und CC_1 senkrecht zu OX, bezw. OZ stehen. Da es sich nur um sehr kleine Winkeländerungen handelt, so darf die Gesammtänderung γ gesetzt werden

$$\gamma = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{OA}} + \frac{\overline{CC_1}}{\overline{OC}}.$$

Bei dem betrachteten Vorgange hat sich der ursprünglich in der OX-Ebene gelegene Punkt A_1 gegen die jetzt nach OC_1 gekommene OZ-Ebene verschoben um $\overline{OA_2}$, sofern A_1A_2 das von

A_1 auf OC_1 gefällte Loth ist, und der ursprünglich in C der OZ-Ebene gelegene Punkt C_1 gegen die jetzt nach OA_1 gelangte OX-Ebene um OC_2, wenn $C_1C_2 \perp OA_1$. Hiernach ergiebt sich für die Schiebung

$$\gamma = \sim \frac{\overline{OA_2}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{OC_2}}{\overline{C_1C_2}} = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{OA}} + \frac{\overline{CC_1}}{\overline{OC}}.$$

Das Vorstehende zusammenfassend, finden wir, dass mit Schiebung bezeichnet ist:

> die Aenderung des rechten Winkels (in Bogenmass) zweier ursprünglich senkrecht zu einander stehenden Flächenelemente,

oder auch

> die Strecke, um welche sich zwei um 1 von einander abstehende Flächenelemente gegen einander verschieben.

§ 29. Schubspannung. Schubkoefficient.

Der in § 28 der Betrachtung unterstellte sehr kleine Würfel $OADBCGFE$ gehöre dem Inneren eines festen Körpers an und nehme unter Einwirkung der äusseren Kräfte, von welchen dieser ergriffen wird, die Gestalt $OADBC_1G_1F_1E_1$ an. Die innere Kraft, mit welcher aus diesem Anlass die an den Würfel anschliessenden Körpertheile in der Ebene $CGFE$ auf denselben einwirken und dadurch die Verschiebung der letzteren nach $C_1G_1F_1E_1$ herbeiführen, heisst, bezogen auf die Flächeneinheit, Schubspannung. Sie unterscheidet sich von der in § 1 besprochenen Spannung dadurch, dass ihre Richtung in das Flächenelement hineinfällt, auf welches sie wirkt, während die im Früheren betrachteten Spannungen senkrecht hierzu standen und deshalb zum Unterschiede als Normalspannungen (Zug- oder Druckspannungen) bezeichnet werden.

Die Schubspannung, die zur Schiebung γ (§ 28) gehört, werde mit τ bezeichnet.

Die Schiebung, welche sich für die Schubspannung gleich der Krafteinheit, d. i. für das Kilogramm ergiebt, soll Schubkoefficient genannt und mit β bezeichnet werden. Sie beträgt

$$\beta = \frac{\gamma}{\tau}. \quad \ldots \ldots \quad 93)$$

Der Schubkoefficient ist demnach derjenige Winkel (in Bogenmass ausgedrückt), um welchen der rechte Winkel zweier ursprünglich senkrecht zu einander stehenden Flächenelemente unter Einwirkung der Schubspannung von 1 Kilogramm sich ändert, oder kurz: die Aenderung des rechten Winkels für das Kilogramm Schubspannung,

oder auch

diejenige Strecke, um welche sich zwei um 1 von einander abstehende Flächenelemente unter Einwirkung der Schubspannung von 1 Kilogramm gegen einander verschieben.

Diese Begriffsbestimmung liefert unmittelbar die Schiebung als Produkt aus Schubspannung und Schubkoefficient, d. h.

$$\gamma = \beta\,\tau, \quad \ldots \ldots \quad 94)$$

wonach der Schubkoefficient auch als diejenige Zahl erklärt werden kann, mit welcher die Schubspannung zu multipliciren ist, um die Schiebung zu erhalten.

Die Schubspannung ergiebt sich als der Quotient: Schiebung durch Schubkoefficient, d. i.

$$\tau = \frac{\gamma}{\beta}. \quad \ldots \ldots \quad 95)$$

Der reciproke Werth von β wird als Schubelasticitätsmodul bezeichnet.

Der Vergleich mit § 2 lässt erkennen, dass zwischen Schiebung, Schubspannung und dem Schubkoefficienten genau dieselben Beziehungen bestehen, wie zwischen Dehnung, Normalspannung und dem Dehnungskoefficienten.

§ 30. Paarweises Auftreten der Schubspannungen.

Wir denken uns aus dem betrachteten und von äusseren Kräften ergriffenen Körper ein unendlich kleines Parallelepiped $OADBCGFE$, Fig. 85, dessen Kanten

$$\overline{OA} = a, \qquad \overline{OB} = b, \qquad \overline{OC} = c$$

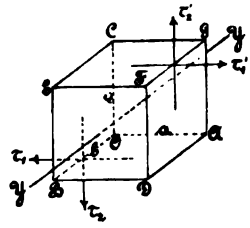


Fig. 85.

sind, herausgeschnitten und die Kräfte eingetragen, mit welchen die an dasselbe anschliessenden Körpermassen in den Schnittflächen auf den Würfel einwirken. Dabei sei zunächst angenommen, dass nur Schubspannungen vorhanden sind und zwar treten auf:

1. in der Begrenzungsfläche $OADB$ von der Grösse ab die Schubspannung τ_1, also die Kraft $\tau_1 \cdot ab$;
2. in der hierzu parallelen Fläche $CGFE$ von dem Inhalte ab die Schubspannung τ'_1, also die Kraft $\tau'_1 \cdot ab$; da $CGFE$ unendlich nahe an $OADB$ liegt, so kann sich τ'_1 nur um eine unendlich kleine Grösse, die mit Δ_1 bezeichnet sein mag, von τ_1 unterscheiden, d. i. $\tau'_1 = \tau_1 + \Delta_1$;
3. in der Begrenzungsfläche $OBEC$ von der Grösse bc die Schubspannung τ_2, demnach die Kraft $\tau_2 \cdot bc$;
4. in der hierzu parallelen Fläche $ADFG$ von dem Inhalte bc die Schubspannung τ'_2, demnach die Kraft $\tau'_2 \cdot bc$; da beide Flächen unendlich nahe bei einander gelegen sind, so kann sich τ'_2 nur um eine unendlich kleine Grösse Δ_2 von τ_2 unterscheiden, d. i. $\tau'_2 = \tau_2 + \Delta_2$.

Soll Gleichgewicht bestehen, so muss u. A. auch die Summe der Momente in Bezug auf die Achse YY, welche durch den

Schwerpunkt des Parallelepipeds geht und mit der Kante OB gleich gerichtet ist, Null sein, d. h. unter Bezugnahme auf Fig. 86:

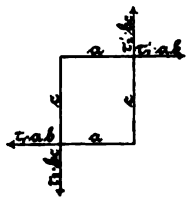


Fig. 86.

$$\tau_1 ab \cdot \frac{c}{2} - \tau_2 bc \frac{a}{2} + \tau'_1 ab \frac{c}{2} - \tau'_2 bc \frac{a}{2} = 0,$$

$$\tau_1 abc + \frac{1}{2} \Delta_1 abc - \tau_2 abc - \frac{1}{2} \Delta_2 abc = 0.$$

Hieraus unter Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen Δ_1 und Δ_2 gegenüber den endlichen Grössen τ_1 und τ_2

$$\tau_1 - \tau_2 = 0,$$

$$\tau_1 = \tau_2, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 96)$$

d. h. die beiden senkrecht zur Kante $OB = b$ stehenden Schubspannungen τ_1 und τ_2 sind einander gleich. Ist die eine vorhanden, so muss es auch die andere sein; sie treten also paarweise auf.

Zu diesem Ergebniss gelangten wir unter der Voraussetzung, dass lediglich Schubspannungen auf den Würfel einwirkten und zwar nur in den vier Ebenen $OADB$, $CGFE$, $OBEC$ und $ADFG$ des Körperelementes, Fig. 85.

Im Allgemeinen werden die Körpertheile, welche das Parallelepiped umgeben, auf dasselbe in den sechs Begrenzungsflächen je mit einer Normalspannung und einer Schubspannung einwirken. Ausserdem können noch Massenkräfte (Schwere, Trägheitsvermögen) ihren Einfluss äussern.

Was zunächst die Normalspannungen anbelangt, so erkennen wir, dass dieselben für die oben aufgestellte Momentengleichung nicht in Betracht kommen: die Normalspannungen in den Begrenzungsflächen $OABD$, $CGFE$, $OBEC$ und $ADFG$ liefern je eine Kraft, welche die Momentenachse YY senkrecht schneidet,

also ein Moment gleich Null giebt; die Normalspannungen in den Begrenzungsflächen $OAGC$ und $BDFE$ ergeben in die Momentenachse fallende Kräfte, sind also einflusslos. Die etwaigen Massenkräfte greifen im Schwerpunkte des Würfels an, gehen demnach durch die Achse, liefern also ein Moment gleich Null.

Von den Schubspannungen entfallen die in den Flächen $OAGC$ und $BDFE$ wirkenden ohne Weiteres, da die ihnen entsprechenden Kräfte die Achse YY schneiden. Hiernach verbleiben noch die Schubspannungen in den vier Flächen $OADB$, $CGFE$, $OBEC$ und $ADFG$.

Wir zerlegen jede derselben nach den Richtungen der Kanten in zwei Komponenten. Momentgebend treten hiervon nur auf die senkrecht zu den Kanten OB und GF wirkenden Spannungen, d. s. τ_1 τ_2 τ'_1 und τ'_2. Für diese aber fanden wir den oben ausgesprochenen Satz. Derselbe gilt demnach allgemein, gleichgiltig, welche Formänderung das Körperelement unter Einwirkung von Normalspannungen, Schubspannungen und Massenkräften erfährt:

> immer sind für zwei rechtwinklig sich schneidende Ebenen die senkrecht zur Durchschnittslinie gerichteten Komponenten der Schubspannungen einander gleich,

oder auch mit Rücksicht darauf, dass diese Durchschnittslinie eine ganz beliebige Lage im Körper haben kann,

> wird in einem Körper eine beliebige Gerade gelegt und dieselbe als der Durchschnitt zweier sich rechtwinklig schneidenden Ebenen angesehen, so ist die senkrecht zur Geraden gerichtete Schubspannung in der einen Ebene gleich der senkrecht zu derselben Geraden stehenden Schubspannung in der anderen Ebene.

Die Schubspannungen treten also paarweise auf.

Es entspricht dies ganz der Natur der Schiebung, eine Aenderung des ursprünglich rechten Winkels zu sein. Die auf die Flächeneinheit der beiden Winkelebenen wirkenden Kräfte, welche diese Aenderung herbeiführen, müssen in der Richtung des einen Schenkels so gross sein, wie in derjenigen des anderen, da keine der beiden Schenkelrichtungen in irgend einer Weise vor der anderen ausgezeichnet ist.

§ 31. Schiebungen und Dehnungen. Schubkoefficient und Dehnungskoefficient.

I. Mit der Schiebung verknüpfte Dehnung und deren grösster Werth.

$ABCD$, Fig. 87, sei der Durchschnitt durch ein Parallelepiped.

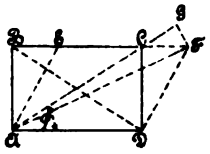


Fig. 87.

Der Körper, welchem dieses angehört, werde nun durch äussere Kräfte ergriffen; infolge dessen ändert er seine Gestalt. Hierbei geht das Rechteck in das Parallelogramm $AEFD$ über: die Ebene, welche ursprünglich in BC sich darstellte, erleidet eine Verschiebung um $\overline{BE} = \overline{CF}$, so dass die Schiebung

$$\gamma = \frac{\overline{CF}}{\overline{CD}}.$$

Gleichzeitig erfährt die Diagonale $\overline{AC}$ eine Vergrösserung auf AF. Wird von A aus mit $\overline{AF}$ ein Kreisbogen beschrieben, so schneidet dieser die Verlängerung von AC in G. Die sehr kleine Strecke FG darf dann als Senkrechte zu AG angesehen werden, während CG die Zunahme der Länge der Diagonale ist. Damit findet sich die Dehnung in Richtung der letzteren

$$\varepsilon = \frac{\overline{CG}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CF}\cos\varphi}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{CD}} \frac{1}{2} \sin 2\varphi,$$
$$\sin\varphi$$

und wegen

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{CD}} = \gamma$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \gamma \sin 2\varphi.$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{4}$, d. h. für $\overline{CD} = \overline{AD}$, also für die quadratische Form des Rechteckes, erlangt ε seinen grössten Werth

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\gamma. \quad \ldots \ldots \quad 97)$$

Gleichzeitig erfährt die andere, wegen $\varphi = \frac{\pi}{4}$ dazu rechtwinklige Diagonale DB eine Zusammendrückung $-\varepsilon_2$ von der gleichen Grösse

$$-\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\gamma.$$

Hiernach ist die Schiebung γ mit einer grössten Dehnung ε_1 und einer gleichzeitigen, dazu senkrechten grössten Verkürzung (Zusammendrückung) ε_2 verknüpft[1]), welche absolut genommen je halb so gross sind, als die Schiebung. Die Richtung dieser Dehnung zweitheilt den rechten Winkel, dessen Aenderung die Schiebung misst.

Hieraus würde zu folgern sein, dass der zuzulassende Werth γ_1 der Schiebung höchstens doppelt so gross sein darf, als die äussersten Falles noch für zulässig erachtete Dehnung ε_1, d. h.

$$\gamma_1 \leqq 2\,\varepsilon_1.$$

Nach Einführung der zulässigen Zuganstrengung

$$k_z = \frac{\varepsilon_1}{\alpha},$$

sowie der zulässigen Schubanstrengung

$$k_s = \frac{\gamma_1}{\beta}$$

ergiebt sich

[1]) Hieraus folgt, dass, wenn ein aus durchaus gleichartigem Material bestehender Körper lediglich in Folge von Schubspannungen zum Bruche gebracht wird, die Rissbildung senkrecht zur Richtung von ε_1 (der Diagonale AC des Quadrates), also in der Richtung von ε_2 (der Diagonale DB des Quadrates) stattfinden muss.

$$k_s \leq 2 \frac{\alpha}{\beta} k_z, \quad \ldots \ldots \quad 98)$$

allerdings unter der Voraussetzung, dass das Material in allen Punkten nach allen Richtungen hin gleich beschaffen, also isotrop ist. Wenn die Beziehung 98 benutzt werden soll, um von der zulässigen Normalspannung eines Materials auf die zulässige Schubspannung desselben zu schliessen, so erscheint es nöthig, überdies zu beachten, dass hierfür Gleichartigkeit der Beanspruchungsweise Vorbedingung ist.

2. Beziehung zwischen Dehnungskoefficient und Schubkoefficient.

Auf einen Würfel $ABCD$, Fig. 88, von der ursprünglichen Seitenlänge 1 wirken in den Seitenflächen AD und BC die Normalspannungen σ. Hierdurch werden die Seitenlängen AB und DC

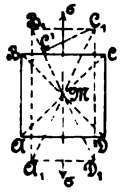


Fig. 88.

um ε gedehnt, also auf die Grösse $\overline{A_1 B_1} = \overline{D_1 C_1} = 1 + \varepsilon$ gebracht werden, während sich die rechtwinklig hierzu stehenden Kanten AD und BC um $\frac{\varepsilon}{m}$ verkürzen (§ 7), demnach die Länge $1 - \frac{\varepsilon}{m}$ annehmen.

Die beiden Diagonalebenen AC und BD schlossen ursprünglich einen rechten Winkel mit einander ein. Unter Einwirkung der Normalspannungen σ hat sich dieser Winkel um γ geändert, entsprechend einer Verschiebung z. B. des Punktes C der Diagonalebene AC gegenüber der anderen Diagonalebene um

$$\gamma = \frac{\overline{M C'}}{\overline{C' C_1}},$$

sofern $C_1 C' \perp D_1 B_1$.

Die Grösse γ folgt unter Berücksichtigung des Umstandes, dass der halbe rechte Winkel sich um $\frac{\gamma}{2}$ geändert hat, aus

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\varepsilon}{m}\right)}{\frac{1}{2}(1+\varepsilon)}.$$

Die Benützung des Satzes

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

führt zu

$$\frac{1-\frac{\gamma}{2}}{1+\frac{\gamma}{2}}=\frac{1-\frac{\varepsilon}{m}}{1+\varepsilon},$$

und unter Beachtung, dass γ und ε sehr kleine Grössen gegenüber 1 sind, zu

$$1-\gamma=1-\left(1+\frac{1}{m}\right)\varepsilon,$$

$$\gamma=\frac{m+1}{m}\varepsilon.$$

Denken wir uns jetzt den Würfel in der Diagonalebene AC auseinander geschnitten, Fig. 89, so wird die Aufrechterhaltung des

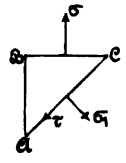


Fig. 89.

Gleichgewichts die Anbringung einer Normalspannung σ_1 und einer Schubspannung τ fordern, derart, dass die Resultante der Kräfte

$$\sigma_1 \cdot \overline{AC}=\sigma_1\sqrt{2} \text{ und } \tau \cdot \overline{AC}=\tau\sqrt{2}$$

gleich der Kraft

$$\sigma \,.\, \overline{BC} = \sigma \,.\, 1 = \sigma,$$

d. h.

$$\sigma_1 \sqrt{2} \,.\, \sqrt{\frac{1}{2}} + \tau \sqrt{2} \,.\, \sqrt{\frac{1}{2}} = \sigma$$

$$\sigma_1 + \tau = \sigma$$

und ferner

$$\sigma_1 \sqrt{2} \,.\, \sqrt{\frac{1}{2}} - \tau \sqrt{2} \,.\, \sqrt{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\sigma_1 = \tau,$$

womit

$$\tau = \frac{\sigma}{2}.$$

Nach dem Früheren ist

$$\tau = \frac{\gamma}{\beta},$$

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha},$$

sodass

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

und mit

$$\gamma = \frac{m+1}{m} \varepsilon,$$

$$\frac{1}{\beta} \frac{m+1}{m} = \frac{1}{2\alpha},$$

$$\beta = 2 \frac{m+1}{m} \alpha, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 99)$$

d. h. der Schubkoefficient ist das $2 \frac{m+1}{m}$-fache des Dehnungskoefficienten.

Da m als eine zwischen 3 und 4 liegende Zahl betrachtet zu werden pflegt, so findet sich

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \frac{5}{2}\alpha \text{ bis } \frac{8}{3}\alpha = 2{,}5\,\alpha \text{ bis } 2{,}67\,\alpha \\ \text{oder} \\ \alpha &= \frac{3}{8}\beta \text{ bis } \frac{2}{5}\beta = 0{,}375\,\beta \text{ bis } 0{,}4\,\beta. \end{aligned}\right\} \quad . \quad 100)$$

Aus Gleichung 98 wird alsdann wegen

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{2\,(m+1)}$$

$$k_s \leqq \frac{m}{m+1}\,k_z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 101)$$

und für $m = 3$ bis 4

$$k_s \leqq \frac{3}{4}\,k_z \text{ bis } \frac{4}{5}\,k_z = 0{,}75\,k_z \text{ bis } 0{,}8\,k_z \quad . \quad . \quad 102)$$

unter den Voraussetzungen, welche zur Beziehung 98 ausgesprochen wurden. Treffen dieselben nicht zu, so erscheint die Gleichung 102 nicht ohne Weiteres giltig. Dann kann es auf Grund von Versuchsergebnissen und sonstigen Erfahrungen nothwendig werden, davon abzuweichen.

V. Drehung.

Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äusseren Kräfte ergeben für jeden Querschnitt desselben ein Kräftepaar, dessen Ebene senkrecht zur Stabachse steht.

Es bezeichne

M_d das Moment des drehenden Kräftepaares,

Θ_1 und Θ_2 die beiden Hauptträgheitsmomente des Stabquerschnittes (§ 21, Ziff. 1),

Θ das kleinere der beiden Hauptträgheitsmomente,

$\Theta' = \Theta_1 + \Theta_2$ das polare Trägheitsmoment,

f den Inhalt des Querschnittes,

τ die Schubspannung in einem beliebigen Punkte des Querschnittes,

k_d die zulässige Anstrengung des Materials gegenüber Drehungsbeanspruchung,

β den Schubkoefficienten (§ 29), (reciproker Werth des Schubelasticitätsmodul),

$\gamma = \beta\,\tau$ die Schiebung oder Gleitung in einem beliebigen Punkte des Querschnittes (§ 28),

ϑ den verhältnissmässigen Drehungswinkel, d. h. den Winkel, um welchen sich das Hauptachsenkreuz eines Stabquerschnittes gegenüber demjenigen des um 1 davon abstehenden Querschnittes verdreht,

l die Länge des Stabes.

§ 32. Stab von kreisförmigem Querschnitt.

Durch die beiden Kräftepaare KK, Fig. 90, deren Ebenen die Stabachse senkrecht schneiden und welche, das Moment M_d besitzend, sich an dem Kreiscylinder das Gleichgewicht halten, werden die einzelnen Querschnitte des Stabes gegen einander verdreht.

Um uns ein Bild über diese Formänderung zu verschaffen, theilen wir die Mantelfläche des Cylinders, Fig. 91, bevor dieser von den

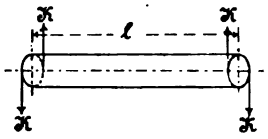


Fig. 90.

äusseren Kräften ergriffen wird, durch n Gerade aa parallel zur Achse in n (25) Rechtecke, je von der Breite $\pi d : n$ ($40\,\pi : 25 = 5{,}0$ mm,

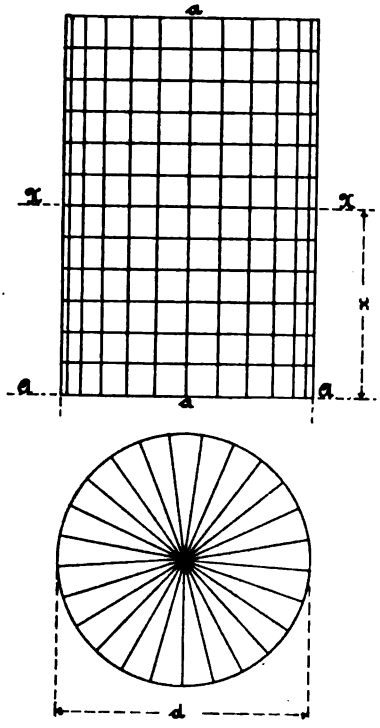
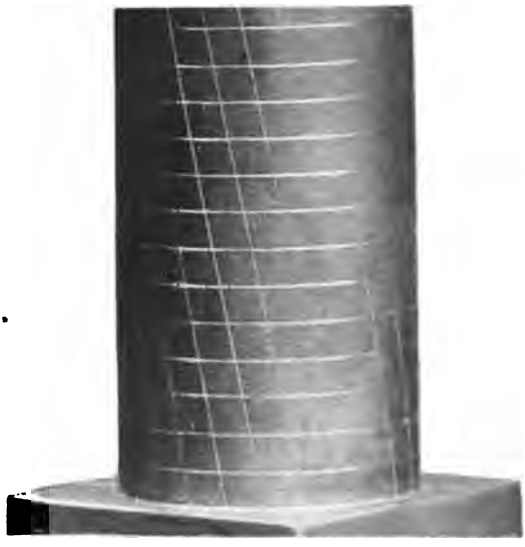


Fig. 91.

da $d = 40$ mm), und diese durch Parallelkreise im Abstand $\pi d : n$ (5,0 mm) in Quadrate, deren Seitenlänge $\pi d : n$ (5,0 mm) beträgt. Auf diese Weise erhalten wir die Fig. 91. Wird nun der so gezeichnete Cylinder der Verdrehung unterworfen, so geht er in Fig. 92 (Tafel V) über. Aus derselben ist zu entnehmen:

Fig. 95.

Fig. 92.



a) dass die auf den unbelasteten Cylinder gezeichneten Quadrate in unter sich gleiche Rhomben übergegangen sind,
b) dass die Ebenen der Parallelkreise, d. s. die Querschnitte des Stabes eben und senkrecht zur Achse des letzteren geblieben sind,
c) dass sich je zwei aufeinander folgende Querschnitte immer gleich viel gegen einander verdreht haben, dass also beispielsweise der Bogen, um welchen sich ein Punkt des Parallelkreises XX, Fig. 91, gegenüber dem ursprünglich gleich gelegenen Punkte im Stabquerschnitt AA bewegt hat, proportional dem Abstande x ist.

Sind nun f_1 und f_2 zwei um 1 von einander abstehende Querschnitte des Stabes und $P_1 P_2$ zwei ursprünglich gleich gelegene Umfangspunkte in denselben, so wird sich unter Einwirkung der äusseren Kräfte P_2 gegen P_1 um eine Strecke γ_1 verdreht haben, welche nach Massgabe des in § 28 Erörterten als die Schiebung im Punkte P_1 zu bezeichnen ist. Für die Schiebung γ in einem auf dem Halbmesser OP_1, Fig. 93, im Abstande $\overline{OP} = \varrho$ von der Achse gelegenen Punkt P erscheint auf Grund der oben angeführten Erfahrungen die Annahme zutreffend, dass sie sich zu derjenigen im Umfangspunkte P_1 verhält wie $\varrho : r$, also

$$\gamma : \gamma_1 = \varrho : r,$$

d. h.

$$\gamma = \gamma_1 \frac{\varrho}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 103)$$

Wird in Fig. 93 die tangentiale Linie $\overline{P_1 P_1'} = \gamma_1$ und die hierzu parallele Strecke $\overline{PP'} = \gamma = \gamma_1 \frac{\varrho}{r}$ gemacht, so liefert die zeichnerische Darstellung der Schiebungen in allen Punkten der Geraden OP_1 die Gerade $OP'P_1'$.

Nach § 29 sind die entsprechenden Schubspannungen

im Punkte P_1 $\qquad \tau_1 = \frac{\gamma_1}{\beta}$,

im Punkte P $\qquad \tau = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\gamma_1}{\beta r} \varrho$.

τ_1 muss naturgemäss tangential zum Kreise, also senkrecht zum Halbmesser OP_1 gerichtet sein. Das Letztere gilt auch für τ.

Wird die Schubspannung τ durch die Strecke $\overline{PP''}$, welche senkrecht zu OP steht, dargestellt und ist der Schubkoefficient β

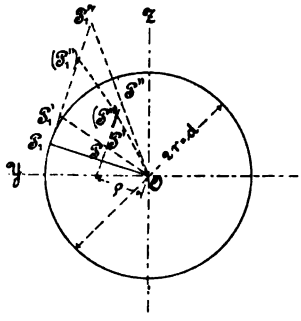


Fig. 93.

konstant, so ergiebt sich als geometrischer Ort aller Punkte P'' eine durch den Mittelpunkt O gehende Gerade. Dies trifft z. B. mit grosser Annäherung zu für Schmiedeisen und Stahl innerhalb der Proportionalitätsgrenze. Ist dagegen β veränderlich und zwar derart, dass β zunimmt mit wachsender Schiebung oder Spannung, wie dies beispielsweise bei Gusseisen der Fall, so liegen die durch

$$\tau_1 = \overline{P_1(P_1'')} \qquad \tau = \overline{P(P'')}$$

bestimmten Punkte (P_1'') und (P'') auf einer gegen die Gerade OP_1 gekrümmten Kurve $O\,(P'')\,(P_1'')$. Die Spannungen nehmen dann nach aussen hin langsamer zu als bei Unveränderlichkeit von β.

Die im Querschnitte durch das Kräftepaar vom Momente M_d wachgerufenen Schubspannungen müssen sich mit M_d im Gleichgewicht befinden. Wird das in P liegende Flächenelement mit df bezeichnet, so spricht sich diese Forderung aus in

$$\int \tau df \cdot \varrho = M_d,$$

$$M_d = \frac{\gamma_1}{r} \int \frac{1}{\beta} \varrho^2 df,$$

und wenn β konstant

$$M_d = \frac{\gamma_1}{\beta r} \int \varrho^2 df.$$

Unter Beachtung, dass

$$\varrho^2 = y^2 + z^2,$$

sofern y und z die rechtwinkligen Koordinaten des in P liegenden Flächenelementes sind, und mit

$$\int y^2\, df = \Theta_1 \quad \text{und} \quad \int z^2\, df = \Theta_2$$

wird

$$M_d = \frac{\gamma_1}{\beta r}(\Theta_1 + \Theta_2) = \tau_1 \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{r} = \tau_1 \frac{\Theta'}{r}.$$

Die beiden Trägheitsmomente Θ_1 und Θ_2 sind für den vollen Kreisquerschnitt

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \frac{\pi}{64} d^4 = \frac{\pi}{4} r^4.$$

Demnach

$$M_d = \tau_1 \frac{\pi}{16} d^3 = \tau_1 \frac{\pi}{2} r^3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 104)$$

$$M_d \leqq \frac{\pi}{16} k_d d^3 \quad \text{oder} \quad k_d \geqq \frac{16}{\pi} \frac{M_d}{d^3}. \quad . \quad . \quad 105)$$

Für den Kreisringquerschnitt ergiebt sich, sofern d der äussere und d_0 der innere Durchmesser ist,

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \frac{\pi}{64} (d^4 - d_0^4)$$

$$M_d = \tau_1 \frac{\pi}{16} \frac{d^4 - d_0^4}{d}$$

$$M_d \leqq \frac{\pi}{16} k_d \frac{d^4 - d_0^4}{d} \quad \text{oder} \quad k_d \geqq \frac{16}{\pi} M_d \frac{d}{d^4 - d_0^4}. \quad . \quad 106)$$

Der Drehungswinkel ϑ folgt unmittelbar aus der gegebenen Begriffsbestimmung

$$\vartheta = \frac{\gamma_1}{r} = \frac{\beta M_d}{\Theta_1 + \Theta_2} = \frac{32}{\pi} \beta \frac{M_d}{d^4}, \quad \ldots \quad 107)$$

beziehungsweise

$$\vartheta = \frac{32}{\pi} \beta \frac{M_d}{d^4 - d_0^4}. \quad \ldots \quad 108)$$

Hiernach der im Abstande 1 von der Achse gemessene Verdrehungsbogen der beiden um l von einander abstehenden Querschnitte des Kreiscylinders

$$\vartheta_l = \vartheta \, l = \frac{32}{\pi} \beta \frac{M_d}{d^4} l, \quad \text{bezw.} \quad \frac{32}{\pi} \beta \frac{M_d}{d^4 - d_0^4} l.$$

Bei den vorstehenden Betrachtungen wurden nur Schubspannungen im Stabquerschnitte ins Auge gefasst; so z. B. im Punkte P, Fig. 93, nur die Schubspannung τ, welche, senkrecht zu OP_1 angreifend, in der Bildebene wirkt. Nach § 30 treten jedoch die Schubspannungen immer paarweise auf, derart, dass in demselben Punkte P senkrecht zur Bildebene, d. h. senkrecht zum Querschnitte eine der oben erwähnten Spannung τ gleiche Schubspannung vorhanden ist. Das Flächenelement, in dem sie wirkt, liegt im Punkte P derjenigen Ebene, welche durch den Halbmesser OP_1 und die Stabachse bestimmt wird. So findet sich beispielsweise im Punkte P_1 die Schubspannung τ_1 nicht blos im Querschnitt (tangential zum Kreisumfang gerichtet), sondern auch in der Achsialebene OP_1 mit der Mantellinie des Cylinders zusammenfallend.

Der Uebergang der Quadrate, Fig. 91, (bei Verdrehung des Cylinders) in die Rhomben, Fig. 92 (Tafel V), beweist dies auch unmittelbar aus der Anschauung. Wie wir in § 28 sahen, ist die Aenderung des ursprünglich rechten Winkels gleich der Schiebung. Diese Winkeländerung misst demnach wegen $\tau = \frac{\gamma}{\beta}$ die Schubspannung unmittelbar. Sie betrifft sowohl den wagrechten, wie auch den senkrechten Schenkel des rechten Winkels. Die entsprechende Schubspannung ist deshalb ebensowohl in senkrechter, wie in wagrechter Richtung vorhanden. Sie muss, da alle Rhomben unter sich gleich sind, für alle Stellen der Mantelfläche des Cylinders dieselbe Grösse besitzen, sowohl tangential zur Umfangs-

linie, als auch in Richtung der Achse des Stabes. Die grösste Schubspannung, welche im Querschnitt stattfindet, tritt also auch in Richtung der Stabachse auf.

Schneiden wir aus dem Cylinder ein kleines Körperelement *ACDBEF*, Fig. 94, heraus, mit den Querschnittsebenen *ACD*, *BEF*

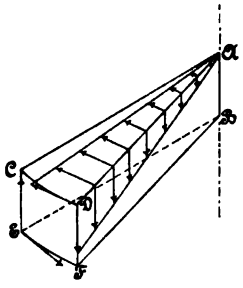


Fig. 94.

und den Achsialebenen *ABFD*, *ABEC*, so ergiebt die graphische Darstellung der in den Ebenen *CDA* und *BFAD* wirkenden Schubspannungen unter Voraussetzung eines unveränderlichen Schubkoefficienten je ein Dreieck. Sie zeigt deutlich das paarweise Auftreten der Schubspannungen in den beiden Ebenen, welche *AD* zur Durchschnittslinie haben.

Bei gewalztem Eisen oder Draht u. s. w. findet infolge der ausgeprägten Faserrichtung die achsiale Schubspannung häufig einen verhältnissmässig geringen Widerstand, weshalb dann Längsrisse eintreten, wie Fig. 95 (Tafel V) für ein der Verdrehung unterworfenes Stück Walzeisen erkennen lässt. Beim Verdrehen von Eisendraht lassen sich solche Risse ebenfalls leicht beobachten. Die achsial gerichteten Schubspannungen sind auch Ursache, dass bei auf Drehung in Anspruch genommenen Körpern nicht selten schon frühzeitig bleibende Verdrehung eintritt, wie dies z. B. bei Walzeisen der Fall zu sein pflegt.

Bei mehr isotropem Material erfolgt die Rissbildung nach Massgabe der Fussbemerkung zu § 31, Ziff. 1, S. 148 unter 45° gegen die Richtungen der Schubspannungen, wie dies der Verlauf der Bruchlinien in den Abbildungen auf Tafel X deutlich erkennen lässt. In Fig. 92 (Taf. V) müsste die Bruchlinie als rechtsgängige, unter 45° geneigte Schraubenlinie verlaufen.

§ 33. Stab von elliptischem Querschnitt.

I. Formänderung.

Nach dem in § 32 gegebenen Vorgange wird ein Cylinder mit elliptischem Querschnitt (grosse Achse $= 2a = 50$ mm, kleine Achse $= 2b = 25$ mm) hergestellt und seine Mantelfläche in Quadrate eingetheilt.

Unter Einwirkung der beiden Kräftepaare, welche sich an ihm das Gleichgewicht halten, geht derselbe in die Gestalt Fig. 96 (Tafel VI) über[1]). Die beiden ursprünglich geraden Mantellinien, welche die Endpunkte der grossen Halbachsen aller Querschnitte enthalten, sind durch die Bezeichnung *a a* hervorgehoben, während diejenigen zwei Linien, welche von den Endpunkten der kleinen Halbachsen sämmtlicher Querschnitte gebildet werden, die Bezeichnung *b b* tragen. Wir erkennen bei genauer Untersuchung des verdrehten Cylinders:

a) dass die Quadrate in Rhomben übergegangen sind,
b) dass die Winkel derjenigen Rhomben, welche mit der einen Seite in der jetzt schraubenförmig gekrümmten Linie *b b* liegen, am meisten von dem ursprünglich rechten Winkel abweichen, während diejenigen Rhomben, deren eine Seite von der Schraubenlinie *a a* gebildet wird, die geringste Abweichung von ihrer früheren Gestalt, dem Quadrate, zeigen,
c) dass die ursprünglich ebenen Querschnitte sich gewölbt haben,
d) dass jedoch die beiden Hauptachsen eines Querschnittes in der ursprünglichen Ebene verblieben sind und den rechten Winkel beibehalten haben,
e) dass sich je die beiden Hauptachsen zweier auf einander folgenden Querschnitte immer um gleichviel gegen einander

---

[1]) Das Material des auf photographischem Wege dargestellten Cylinders ist wie bei Fig. 92 (Tafel V) und bei Fig. 100 (Tafel VII), sowie Fig. 101 (Tafel VIII) Hartblei. Dasselbe behält die Formänderung fast vollständig bei und giebt deshalb auch nach der Lösung des Stabes aus der Prüfungsmaschine ein gutes Bild dieser Aenderung. Bei Verwendung von stark elastischem Material, wie Gummi, ist die Formänderung eine gleiche, nur verschwindet sie mit der Entlastung des Probekörpers zu einem grossen Theile und entzieht sich so der Darstellung. Versuche mit schmiedbarem Eisen führen zu einem ganz entsprechenden Ergebnisse.

Fig. 96.

(um die in ihrer Lage unverändert gebliebene Stabachse) verdreht haben[1]).

2. Schubspannungen.

Fassen wir zunächst einen Umfangspunkt P' des Querschnittes, Fig. 97, ins Auge, so muss die Schubspannung τ' in dem zu P

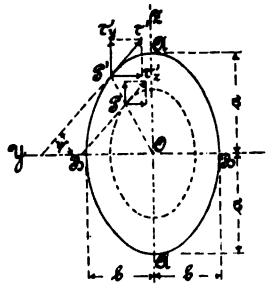


Fig. 97.

gehörigen Querschnittselement naturgemäss tangential zur Umfangslinie gerichtet sein, sofern hier äussere, eine andere Richtung der Schubspannung bedingende Kräfte nicht angreifen.

Wir zerlegen τ' in die beiden Komponenten

τ'_y, senkrecht zur y-Achse wirkend,
τ'_z, „ „ z- „ „ , und

bezeichnen durch ψ den Winkel, welchen die Tangente im Punkte P' mit der y-Achse einschliesst, sowie durch y' und z' die Koordinaten des Umfangspunktes P'. Dann folgt zunächst

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\tau'_y}{\tau'_z}$$

und sodann aus der Gleichung der Ellipse

$$\frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{a^2} = 1,$$

durch Differentiation

[1]) Die Bestimmung dieses Verdrehungswinkels erfolgt in § 43.

$$\frac{y'}{b^2}\,dy' + \frac{z'}{a^2}\,dz' = 0$$

$$\frac{dz'}{dy'} = -\frac{a^2}{b^2}\,\frac{y'}{z'}.$$

Aus Fig. 97 ergiebt sich unmittelbar

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{dz'}{-dy'}.$$

Folglich durch Gleichsetzen der beiden für $\operatorname{tg}\psi$ erhaltenen Werthe

$$\frac{\tau_y'}{\tau_z'} = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{y'}{z'}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 109)$$

Hiernach erscheint τ_y' proportional y' und τ_z' proportional z'.

Denken wir uns für den im Inneren des Querschnittes liegenden Punkt P, bestimmt durch die Koordinaten y und z, die entsprechende (ähnliche) Ellipse konstruirt, so wird auch hier die Schubspannung τ, deren Komponenten τ_y ($\perp OY$) und τ_z ($\perp OZ$) seien, tangential gerichtet sein müssen. Demgemäss erhalten wir

$$\tau_y = Ay \qquad \tau_z = Bz, \quad \ldots \quad 109\text{a})$$

worin A und B Konstante bedeuten.

Die im Querschnitte wachgerufenen Schubspannungen müssen sich nun mit dem Momente M_d im Gleichgewicht befinden. Wird das in P liegende Flächenelement mit df bezeichnet, so ergiebt sich die Bedingungsgleichung

$$\int (\tau_y\,df\,.\,y + \tau_z\,df\,z) = M_d,$$

woraus unter Beachtung der Gleichungen 109a und mit Rücksicht darauf, dass nach § 17, Ziff. 6

$$\int y^2\,df = \frac{\pi}{4}\,a\,b^3 \qquad \int z^2\,df = \frac{\pi}{4}\,a^3\,b$$

$$M_d = A\,\frac{\pi}{4}\,a\,b^3 + B\,\frac{\pi}{4}\,a^3\,b.$$

Die Verbindung der Gleichungen 109 und 109a ergiebt

$$\frac{a^2}{b^2}\frac{y'}{z'} = \frac{A y'}{B z'},$$

woraus

$$\frac{A}{B} = \frac{a^2}{b^2} \quad \text{oder} \quad A = B\frac{a^2}{b^2}.$$

Durch Einführung dieses Werthes in die Gleichung für M_d findet sich

$$M_d = B\frac{a^2}{b^2}\frac{\pi}{4}a b^3 + B\frac{\pi}{4}a^3 b = \frac{\pi}{2}a^3 b B,$$

$$B = \frac{2}{\pi}\frac{M_d}{a^3 b},$$

$$A = B\frac{a^2}{b^2} = \frac{2}{\pi}\frac{M_d}{a b^3}.$$

Hiermit nach den Gleichungen 109a die Schubspannungen für den beliebigen Querschnittspunkt P

$$\left.\begin{aligned} \tau_y &= Ay = \frac{2}{\pi}\frac{M_d}{a b^3}y, \\ \tau_z &= Bz = \frac{2}{\pi}\frac{M_d}{a^3 b}z, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 110)$$

$$\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2} = \frac{2}{\pi}\frac{M_d}{a^3 b^3}\cdot\sqrt{a^4 y^2 + b^4 z^2}. \quad . \quad 111)$$

Dieser Ausdruck wächst mit y und z, erlangt also für bestimmte Umfangspunkte den grössten Werth. Zur Feststellung, in welchen Punkten des Umfangs dies der Fall ist, werde $a \geqq b$ vorausgesetzt und dem Ausdruck für τ', giltig für den Umfangspunkt $y'z'$, die Form

$$\tau' = \frac{2}{\pi}\frac{M_d}{a\,b^2}\sqrt{\left(\frac{y'}{b}\right)^2 + \left(\frac{z'}{a}\right)^2\left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad 112)$$

gegeben. Da

$$\left(\frac{y'}{b}\right)^2 + \left(\frac{z'}{a}\right)^2 = 1,$$

so muss wegen $a \geqq b$

$$\left(\frac{y'}{b}\right)^2 + \left(\frac{z'}{a}\right)^2\left(\frac{b}{a}\right)^2 \leqq 1$$

sein. Demnach ergiebt sich der grösste Werth der Schubspannung für $y' = \pm b$ und $z = 0$ zu

$$\tau'_{max} = \frac{2}{\pi}\frac{M_d}{a\,b^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 113)$$

d. h. die grösste Schubspannung tritt in den Endpunkten $B\,B$ der kleinen Achse, also in denjenigen Punkten auf, welche der Stabachse am nächsten liegen.

Hiermit folgt

$$k_d \geqq \frac{2}{\pi}\frac{M_d}{a\,b^2} \quad \text{oder} \quad M_d \leqq \frac{\pi}{2} k_d\, a\, b^2. \quad . \quad . \quad 114)$$

In den Endpunkten $A\,A$ der grossen Achse ist die Schubspannung, da hier

$$y' = 0 \qquad z' = \pm a$$

$$\tau' = \frac{2}{\pi}\frac{M_d}{a^2\,b} = \frac{b}{a}\tau_{max}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 115)$$

d. i. im Verhältniss der Halbachsen kleiner als die Spannung in den Punkten $B\,B$.

Dieses für den ersten Augenblick überraschende Ergebniss steht in voller Uebereinstimmung mit der oben unter Ziff. 1, b angeführten Beobachtung. Die Winkeländerungen, welche nach § 28 die Schiebungen γ messen, die ihrerseits nach § 29 zu den Schubspannungen in der Beziehung

$$\tau = \frac{\gamma}{\beta}$$

stehen, sind — Fig. 96 (Taf. VI) — am grössten in den Endpunkten der kleinen und am kleinsten in den Endpunkten der grossen Achse der Ellipse.

Hinsichtlich des Gesetzes, nach dem sich die Schubspannungen im Innern ändern, ist die ohne Weiteres aus den Gleichungen 110 und 111 folgende Bemerkung von Interesse, dass für alle auf der Geraden $O P'$, Fig. 97, liegenden Querschnittselemente die Spannungen parallel gerichtet und proportional dem Abstande von der Stabachse sind. In Fig. 98 ist das Aenderungsgesetz der Schubspannungen dargestellt für die Punkte der grossen und der kleinen, sowie für diejenigen einer beliebigen Halbachse OP'. Für die Umfangspunkte lässt sich dasselbe unmittelbar der Gleichung 112 entnehmen.

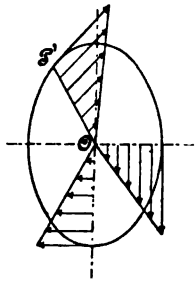


Fig. 98.

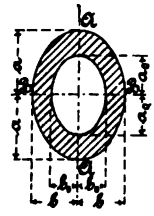


Fig. 99.

Handelt es sich nicht um einen Voll-, sondern um einen Hohlstab, Fig. 99, so gilt unter der von dem Gange der obigen Entwicklung bedingten Voraussetzung, dass die innere Begrenzungsellipse der äusseren ähnlich ist, d. h.

$$a_0 : a = b_0 : b = m,$$

wegen

$$\int y^2\, df = \frac{\pi}{4}(a\, b^3 - a_0\, b_0^3) \qquad \int z^2\, df = \frac{\pi}{4}(a^3\, b - a_0^3\, b_0)$$

$$M_d = A\frac{\pi}{4}(a\, b^3 - a_0\, b_0^3) + B\frac{\pi}{4}(a^3\, b - a_0^3\, b_0),$$

woraus dann mit

$$A = \frac{a^2}{b^2} B$$

$$B = \frac{2}{\pi} \frac{M_d}{(1 - m^4) a^3 b}$$

und schliesslich

$$\tau = \frac{2}{\pi} \frac{M_d}{(1 - m^4) a^3 b^3} \sqrt{a^4 y^2 + b^4 z^2} \quad \ldots \quad 116)$$

Für die Punkte B des Umfanges erlangt τ seinen Grösstwerth, nämlich

$$\tau'_{max} = \frac{2}{\pi} \frac{M_d}{(1 - m^4) a b^2} = \frac{2}{\pi} \frac{M_d}{a b^3 - a_o b_o^3} b, \quad 117)$$

sodass

$$k_d \geq \frac{2}{\pi} \frac{M_d}{a b^3 - a_o b_o^3} b \quad \text{oder} \quad M_d \leq \frac{\pi}{2} k_d \frac{a b^3 - a_o b_o^3}{b}. \quad 118)$$

Die Gleichungen 114 und 117 zeigen deutlich, dass die Widerstandsfähigkeit eines elliptischen Voll- oder Hohlstabes gegenüber der Drehungsbeanspruchung abhängt von dem kleinen der beiden Hauptträgheitsmomente, also nicht von der Summe beider, wie die ältere Lehre von der Drehungsfestigkeit angab.

Die letztere schuf ursprünglich ihre Entwickelungen, welche davon ausgingen, dass die Schubspannungen proportional mit dem Abstande des Querschnittselementes von der Stabachse wachsen und senkrecht zu diesem Abstande stehen, allerdings nur für die in § 32 behandelten Querschnitte; hierfür war sie auch zutreffend. Ihre Uebertragung auf andere Querschnitte war unzulässig.

Die Gleichung 118 enthält die Beziehung 105 und 106 je als besonderen Fall in sich. Es wird für

$$a = b = \frac{d}{2} \qquad a_o = b_o = \frac{d_o}{2}$$

$$M_d \leq \frac{\pi}{16} k_d \frac{d^4 - d_o^4}{d}$$

und für $d_o = 0$

$$M_d \leqq \frac{\pi}{16} k_d d^3.$$

Die Schlussbemerkungen zu § 32, betreffend das paarweise Auftreten der Schubspannungen u. s. w., gelten auch hier, überhaupt sinngemäss für alle auf Drehung beanspruchten Körper.

Hinsichtlich der Folgen, welche eine Hinderung der oben unter Ziff. 1 c festgestellten Querschnittswölbung mit sich bringt, sei auf § 34, Ziff. 3 verwiesen.

§ 34. Stab von rechteckigem Querschnitt.

I. Formänderung.

Nach dem Vorgange in den Paragraphen 32 und 33 wird ein Prisma von rechteckigem Querschnitt (60 mm breit, 20 mm stark) hergestellt und jede seiner 4 Mantelflächen in Quadrate von 5 mm Seitenlänge eingetheilt. Unter Einwirkung der beiden Kräftepaare, welche sich an dem Stabe das Gleichgewicht halten, geht derselbe in die Form Fig. 100 (Taf. VII) über.

Wir erkennen Folgendes:

a) Die Quadrate haben ihre ursprüngliche Form mehr oder minder verloren und rhombenartige Gestalt angenommen.

Die Querlinien schneiden mit ihren äussersten Elementen die 4 Eckkanten des Stabes senkrecht, wie dies ursprünglich jede der früher geraden Querlinien in ihrer ganzen Erstreckung that; dagegen ändert sich die Rechtwinkligkeit zwischen Quer- und Längslinien um so mehr, je näher die letzteren der Seitenmitte liegen. Die Aenderung des rechten Winkels, d. h. die Schiebung (§ 28), beträgt hiernach in den Kanten des Stabes Null, wächst von da zunächst ziemlich rasch, sofern die breite Seitenfläche ins Auge gefasst wird, und erreicht für sämmtliche Seitenflächen in deren Mitten ausgezeichnete Werthe, von denen derjenige in der Mitte der breiten Seitenflächen der grössere ist. Die grösste Schiebung findet hiernach in denjenigen Punkten des Stabumfanges statt, welche der Achse am nächsten liegen.

b) Die ursprünglich ebenen Querschnitte haben sich gewölbt.
c) Die beiden Hauptachsen eines Querschnittes sind in der ursprünglichen Ebene geblieben. (Für einen Querschnitt ist dessen ursprüngliche Ebene gestrichelt eingetragen.)
d) Je die beiden Hauptachsen zweier auf einander folgenden Querschnitte haben sich immer um gleichviel gegen einander verdreht[1]).

Hinsichtlich der Wölbung der Querschnitte ist es von Interesse zu beachten, dass der Abstand derjenigen Punkte des gewölbten Querschnittes, welche von den Seitenmitten ab- und nach den Stabkanten hin gelegen sind, von der ursprünglichen Querschnittsebene (vgl. Ziff. 3) sich als ziemlich bedeutend erweist, und dass infolgedessen die Ausbildung dieser gewölbten Form eine verhältnissmässig grosse Zurückziehung (positive im ersten und dritten, negative im zweiten und vierten Quadranten) der von den Seitenmitten abgelegenen Fasern gegenüber der früheren Querschnittsebene zur Folge hat. Wie ersichtlich, ist die Wölbung erhaben, d. h. der Abstand der einzelnen Querschnittselemente von der Grundebene hat sich vergrössert, in denjenigen diametral zu einander liegenden beiden Querschnittsvierteln, gegen deren lange Seiten die Kräfte des drehenden Kräftepaares gerichtet sein müssten, wenn hierdurch die stattgehabte Verdrehung bewerkstelligt werden sollte. In den beiden anderen Querschnittsvierteln ist die Wölbung vertieft, d. h. der Abstand der einzelnen Querschnittselemente von der Grundebene hat sich verkleinert.

Die Stirnflächen des verdrehten Prisma werden hiernach zeigen (vgl. Fig. 100)

im Viertel 1 erhabene Wölbung,
„ „ 2 vertiefte „ ,
„ „ 3 erhabene „ ,
„ „ 4 vertiefte „ .

Ist für den rechteckigen Stab $b = h$, d. h. handelt es sich um einen quadratischen Querschnitt, so nimmt derselbe bei der Verdrehung die Form Fig. 101 (Taf. VIII) an. Dieselbe bestätigt das oben unter a) bis d) Erkannte durchaus. Nur hinsichtlich der

[1]) Die Bestimmung dieses Verdrehungswinkels erfolgt in § 43. Vergl. auch die erste Fussbemerkung zu § 52, Ziff. 2, b.

Fig. 100.

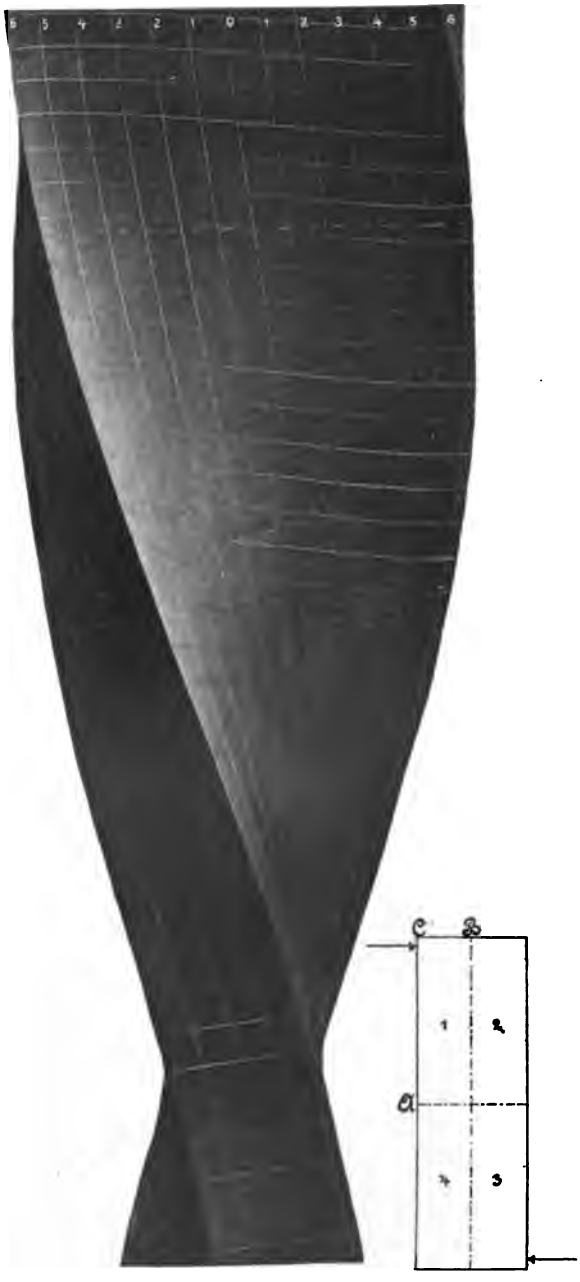
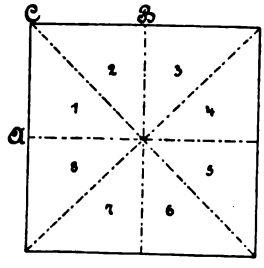


Fig. 101.



Wölbung der Querschnitte tritt insofern eine Aenderung ein, als hier alle Seiten gleich gross sind und deshalb kein Grund vorliegt, weshalb sich das eine Viertel anders verhalten soll, wie das andere, wenn die Kräfte, welche das vorhandene Kräftepaar liefern, auf den durch die Verdrehungsrichtung bestimmten 4 Halbseiten wirkend gedacht werden. Thatsächlich weist Fig. 101 nach, dass für quadratischen Querschnitt (vergl. Fig. 101) bei der angenommenen Verdrehungsrichtung die Wölbung eine erhabene ist in den Achteln 1, 3, 5 und 7, dagegen eine vertiefte in den Achteln 2, 4, 6 und 8. Ausser den beiden Symmetrieachsen verbleiben noch die zwei Diagonalen in der ursprünglichen Querschnittsebene und damit auch die vier Eckpunkte. Die hierdurch ausgezeichneten vier Linien weisen nach Ziff. 2 noch die weitere Eigenschaft auf, dass die in ihren Punkten wirkenden Schubspannungen senkrecht zu ihnen gerichtet sind.

Die Erkenntniss dieser eigenartigen Formänderungen der Querschnitte ist unter Umständen von grosser praktischer Bedeutung, wie unter Ziff. 3 am Schlusse dieses Paragraphen näher erörtert werden wird.

2. Schubspannungen.

Da die Schubspannungen in den Querschnittselementen der Umfangslinie unter der Voraussetzung, dass äussere Kräfte hier nicht auf die Mantelfläche des Stabes wirken, nur tangential an

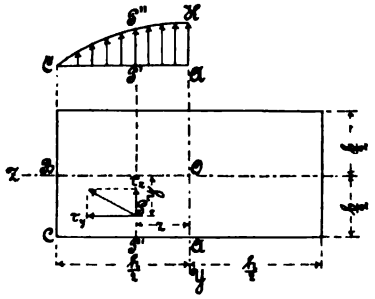


Fig. 102.

diese Linie gerichtet sein können, so müssen sie auf der Begrenzungsstrecke $\overline{AC}$, Fig. 100 (Taf. VII) oder Fig. 102, in die Richtung AC fallen, ebenso auf der Strecke BC in die Richtung BC.

Demgemäss ergeben sich im Flächenelement C (Eckpunkt) des Querschnittes, da dasselbe sowohl der Linie AC, wie auch der Linie BC angehört, zwei senkrecht zu einander gerichtete Schubspannungen, welche eine Resultante liefern müssten. Dieselbe hätte jedenfalls die Forderung zu befriedigen, dass sie gleichzeitig in die Richtungen von AC und BC falle. Dieser Bedingung kann sie nur entsprechen, wenn ihre Grösse Null ist. Infolgedessen muss die Schubspannung in C selbst Null sein. Aus diesem Grunde werden sich die in den Querschnittselementen AC wirkenden Schubspannungen von A nach C hin bis auf Null vermindern müssen; ebenso werden die in BC thätigen Schubspannungen von B nach C bis auf Null abzunehmen haben.

Die Richtigkeit dieser Erwägungen wird voll bestätigt durch die oben unter Ziff. 1, a angegebene Beobachtung. Dort war festzustellen, dass die Schiebungen in den Kantenpunkten, d. h. in C Null waren, nach der Mitte der Seite, d. h. nach A bezw. B hin erst rasch und dann langsamer wuchsen, entsprechend einem Verlaufe etwa nach der Kurve CH, Fig. 102, die erhalten wird durch Ermittelung der Aenderungen der ursprünglich rechten Winkel; demgemäss werden sich auch die Schubspannungen von C nach A hin ändern.

Zum Zwecke der Bestimmung der letzteren erinnern wir uns, dass beim elliptischen Querschnitt (§ 33) die im beliebigen Punkte P wirkende Spannung τ die beiden Komponenten τ_y und τ_z lieferte, für welche galt

$$\tau_y = Ay \qquad \tau_z = Bz.$$

Hier werden τ_y (senkrecht zur y-Achse) und τ_z (senkrecht zur z-Achse) in entsprechender Weise von y und z abhängen müssen. Dort waren A und B konstante Grössen, während sie hier veränderlich sein müssen, da ja τ_y für $y = -\frac{b}{2}$ nach C hin bis auf Null abzunehmen hat, ebenso τ_z für $z = \frac{h}{2}$.

Wird die Schubspannung in der Mitte der langen Seite, d. h. in A mit τ'_a, diejenige in Punkt P', welcher im Abstande z von A auf der Strecke AC gelegen ist, mit τ' bezeichnet und $\overline{AH} = \tau'_a$, $P'P'' = \tau'$ gemacht; wird ferner in Anlehnung an § 38, Fig. 125, dem Aenderungsgesetz der Schubspannungen in der Linie AC, d. h.

dem Verlaufe der Linie $CP''H$, die einfachste Kurve, die gewöhnliche Parabel mit H als Scheitel und HA als Hauptachse zu Grunde gelegt, so folgt nach dem bekannten Satz, dass sich bei der Parabel die Abscissen verhalten wie die Quadrate der Ordinaten

$$(\tau'_a - \tau') : \tau'_a = z^2 : \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$\tau' = \tau'_a \left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right].$$

Demgemäss setzen wir für den Faktor A in der Gleichung $\tau_y = Ay$

$$A = c\,\tau'_a \left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right] = m\left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right]$$

und ganz entsprechend für B in dem Ausdruck $\tau_z = Bz$

$$B = d\,\tau'_b \left[1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2\right] = n\left[1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2\right],$$

wenn c, d, m und n Konstante sind und τ'_b die Schubspannung im Punkte B bezeichnet.

Nach dem bei der Ellipse (§ 33) gewonnenen Ergebnisse — dort verhielten sich die Schubspannungen in den Endpunkten der grossen Achse zu denjenigen in den Endpunkten der kleinen Achse umgekehrt wie die zugehörigen Halbachsen — sowie mit Rücksicht darauf, dass in Fig. 100 die Aenderungen der rechten Winkel in der Mitte der langen Seite, sowie diejenigen in der Mitte der kurzen Seite auf das Verhältniss $h : b$ hinweisen, werde angenommen

$$\tau'_b = \tau'_a \frac{b}{h}.$$

Es ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} \tau_y &= m\left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right] y, \\ \tau_z &= n\left[1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2\right] z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 119)$$

und in ganz gleicher Weise wie in § 33, Ziff. 2

$$\int \left(\tau_y \, df \,.\, y + \tau_z \, df \,.\, z\right) = M_d$$

$$= m \int \left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right] y^2 \, df + n \int \left[1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2\right] z^2 df,$$

$$M_d = \frac{1}{12} m b^3 h + \frac{1}{12} n b h^3 - 4 \left(\frac{m}{h^2} + \frac{n}{b^2}\right) \int y^2 z^2 df.$$

Wegen

$$\int y^2 z^2 df = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} y^2 dy \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{1}{144} b^3 h^3$$

wird

$$M_d = \frac{1}{12} m b^3 h + \frac{1}{12} n b h^3 - \frac{1}{36} \left(\frac{m}{h^2} + \frac{n}{b^2}\right) b^3 h^3. \quad 120)$$

Nun ist

für den Punkt A, d. i. $y = \frac{b}{2}$ und $z = 0$,

$$\tau_y = \tau'_a,$$

womit nach der ersten der Gleichungen 119

$$\tau'_a = m \frac{b}{2} \quad \text{oder} \quad m = \frac{2\tau'_a}{b}$$

und

für den Punkt B, d. i. $y = 0$ und $z = \frac{h}{2}$,

$$\tau_z = \tau'_b,$$

infolgedessen nach der zweiten der Gleichungen 119

$$\tau'_b = n \frac{h}{2} \quad \text{oder} \quad n = \frac{2\tau'_b}{h} = \frac{2b}{h^2} \tau'_a.$$

Hiermit gehen die Gleichungen 119 und 120 über in

$$\left.\begin{aligned} \tau_y &= 2\,\tau'_a \frac{1}{b}\left[1-\left(\frac{2z}{h}\right)^2\right] y, \\ \tau_z &= 2\,\tau'_b \frac{1}{h}\left[1-\left(\frac{2y}{b}\right)^2\right] z \\ &= 2\,\tau'_a \frac{b}{h^2}\left[1-\left(\frac{2y}{b}\right)^2\right] z, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 121)$$

beziehungsweise

$$M_d = \frac{2}{9}\,\tau'_a\, b^2 h. \quad \ldots \quad 122)$$

Gleichung 122 führt zu

$$M_d \leqq \frac{2}{9}\,k_d\, b^2 h \quad \text{oder} \quad k_d \geqq \frac{9}{2}\,\frac{M_d}{b^2 h}. \quad \ldots \quad 123)$$

Die grösste Anstrengung tritt hierbei auf in denjenigen Punkten der Umfangslinie des Querschnittes, welche der Stabachse am nächsten liegen.

(Vergl. das unter Ziff. 3 Erörterte.)

Um ein Bild der Spannungsvertheilung über den rechteckigen Querschnitt zu erhalten, sind in Fig. 103 die Spannungen für einige

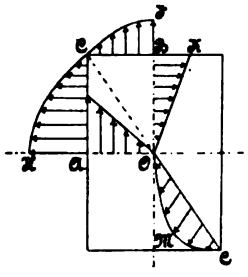


Fig. 103.

Flächenstreifen eingetragen. Es werden dargestellt die Schubspannungen

für die in der Linie CA liegenden Querschnittselemente durch die wagrechten Ordinaten der Kurve CH,
für die in der Linie CB liegenden Querschnittselemente durch die senkrechten Ordinaten der Kurve CJ,
für die in der Linie OA liegenden Querschnittselemente durch die zu OA senkrechten Pfeillinien,
für die in der Linie OB liegenden Querschnittselemente durch die wagrechten Ordinaten der Geraden OK,
für die in der Linie OC liegenden Querschnittselemente durch die geneigten Ordinaten der Kurve OMC.

Die letztere Linie folgt aus den Gleichungen 121 unter Beachtung, dass für die Punkte der Diagonale OC

$$\frac{y}{z} = \frac{b}{h}$$

ist. Hiermit ergiebt sich dann für die einzelnen in OC gelegenen Flächenelemente

$$\tau_z : \tau_y = b : h,$$

d. h. die Schubspannungen sind parallel gerichtet, und

$$\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2}$$

$$= 2\,\tau_a' \left[1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2\right] \frac{y}{b} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2}.$$

Für

$$y = 0{,}577\,\frac{b}{2}$$

erlangt τ seinen grössten Werth.

Im Falle $b = h$, d. i. für den quadratischen Querschnitt, stehen die Schubspannungen senkrecht auf den Diagonalen.

Hierbei ist im Auge zu behalten, dass diese Schubspannungen immer paarweise auftreten und deshalb gleichzeitig in der Ebene des Querschnittes und in senkrecht dazu stehenden Ebenen wirken.

(Vergl. Schlussbemerkung zu § 32.)

Die Beziehungen 105 (Kreis), 106 (Kreisring), 114 (Ellipse), 118 (Ellipsenring) und 123 (Rechteck) lassen sich auf die gemeinsame Form

$$M_d \leqq \varphi\, k_d \frac{\Theta}{b} \quad \ldots\ldots\ 124)$$

bringen, worin bedeutet

M_d das Moment des drehenden Kräftepaares,

Θ das kleinere der beiden Hauptträgheitsmomente,

b für den Kreis den Halbmesser, für die Ellipse die kleine Halbachse, für das Rechteck die kleinere Seite,

k_d die zulässige Drehungsanstrengung,

φ einen Zahlenwerth, welcher beträgt

für den Vollkreis und den Kreisring mit $b = \frac{d}{2}$ $\varphi = 2$,

für die Vollellipse und den Ellipsenring $\varphi = 2$,

für das Rechteck $\varphi = \frac{8}{3}$.

Auf dieselbe Form, Gleichung 124, lässt sich auch der Ausdruck für das gleichseitige Dreieck

$$M_d = \frac{1}{20} k_d b^3 \text{ [1]},$$

sowie derjenige für das gleichseitige Sechseck

$$M_d = \frac{1}{1{,}09} k_d b^3 \text{ [1]},$$

worin je b die Seitenlänge bezeichnet, bringen.

Es ist dann

$$\varphi = 1{,}385$$

beziehungsweise

$$\varphi = 1{,}694.$$

---

[1]) S. u. A. Herrmann, Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architektenvereins 1883, S. 172.

Die Gleichung 124 spricht deutlich aus, dass die Widerstandsfähigkeit gegenüber Drehungsbeanspruchung von dem kleineren der beiden Hauptträgheitsmomente bestimmt wird, dass also das grössere nicht in Betracht kommt.

3. Gehinderte Ausbildung der Querschnittswölbung.

Unter Ziff. 1 erkannten wir, dass die ursprünglich ebenen Querschnitte des rechteckigen Prisma infolge Einwirkung des Drehungsmomentes in gekrümmte Flächen übergehen. Für den Fall, dass der Querschnitt langgestreckt war, wie bei Stab Fig. 100 (Taf. VII), fand sich, dass die Strecken, um welche hierbei die einzelnen, von den Seitenmitten abgelegenen Querschnittselemente aus der ursprünglichen Querschnittsebene herausgetreten waren, verhältnissmässig bedeutend ausfielen. (Vergleiche daselbst die gestrichelte Linie, welche die ursprüngliche Ebene des jetzt gewölbten Querschnittes angiebt; das Achsenkreuz ist beiden gemeinsam.)

So lange der auf Drehung in Anspruch genommene Körper durchaus prismatisch ist, hat diese Krümmung der Querschnitte verhältnissmässig geringes Interesse für den Ingenieur. Ganz anders gestaltet sich jedoch die Sache, sobald diese Voraussetzung nicht mehr erfüllt ist.

Handelt es sich beispielsweise um einen Körper, wie in § 35, Fig. 104 dargestellt, der an seinen Enden Platten trägt, durch welche die beiden Kräftepaare, die sich an ihm das Gleichgewicht halten, auf den mittleren prismatischen Theil wirken, so bietet sich da, wo dieser an die Platte anschliesst, der Querschnittskrümmung ein Hinderniss. Insbesondere sind die nach den Stabkanten zu gelegenen Fasern, Fig. 100, gehindert, um den verhältnissmässig bedeutenden Betrag, den die erhabene Wölbung verlangt, von der Platte sich zurückzuziehen. Infolgedessen entstehen in allen denjenigen Querschnittselementen, welche unter Einwirkung des Drehungsmomentes bestrebt sind, ihre Entfernung von der Grundebene zu vergrössern (sich erhaben zu wölben, d. s. die Rechtecksviertel 1 und 3, Fig. 100), Zugspannungen, während in allen denjenigen Querschnittspunkten, welche bestrebt sind, den bezeichneten Abstand zu verringern (sich vertieft zu wölben, d. s. die Rechtecksviertel 2 und 4, Fig. 100), Druckspannungen wachgerufen werden. Sind diese Normalspannungen genügend gross, so kann

der Bruch, obgleich die äusseren Kräfte nur ein auf Drehung wirkendes Kräftepaar ergeben, durch Zerreissen der am stärksten gespannten Fasern veranlasst werden.

Einer äusseren Zug- oder Druckkraft bedarf es nicht, da die Zugspannungen in gewissen Querschnittstheilen (Rechtecksviertel 1 und 3, Fig. 100) durch Druckspannungen in den anderen Querschnittselementen (Rechtecksviertel 2 und 4, Fig. 100) im Gleichgewicht gehalten werden.

In solchen Fällen der mehr oder minder vollständig gehinderten Ausbildung der Querschnittswölbung rücken die gefährdetsten Stellen, welche bei Nichthinderung dieser Ausbildung mit denjenigen Punkten des Querschnittsumfanges zusammenfallen, welche der Stabachse am nächsten liegen, von der letzteren fort; beispielsweise in Fig. 100 von A nach C hin. Bei langgestreckten Querschnitten werden sie sehr rasch von A nach C hin vorwärtsschreiten.

Beim quadratischen Querschnitt, Fig. 101 (Taf. VIII), bleibt C in der ursprünglichen Querschnittsebene; infolgedessen ist es ausgeschlossen, dass bei Gleichartigkeit des Materiales die grösste Anstrengung in oder nahe bei C auftritt. Sie ist — allgemein — da zu suchen, wo die Gesammtinanspruchnahme, herrührend von den Schubspannungen, welche durch das Drehungsmoment verursacht werden, und von den Normalspannungen, die infolge der Hinderung der Querschnittswölbung in's Dasein treten, den grössten Werth erlangt. Bei dem quadratischen Querschnitt wird sie — soweit dies hier ohne Anstellung besonderer Rechnungen beurtheilt werden kann — der Mitte der Seitenflächen viel näher liegen als den Stabkanten. Ihre Bestimmung, welche überdies von dem Grade der Vollständigkeit der mehrfach erwähnten Hinderung der Querschnittskrümmung abhängt, gehört in das Gebiet der zusammengesetzten Elasticität und Festigkeit.

(Vergl. auch den vorletzten Absatz von § 32, sowie die Bemerkungen zu Gleichung 98, § 31, Ziff. 1.)

Die zur Berechnung von Stäben, welche durch Drehung beansprucht werden, in diesem und den vorhergehenden Paragraphen aufgestellten Gleichungen sind unter der stillschweigend gemachten Voraussetzung entwickelt, dass die Querschnittswölbung sich ungehindert ausbilden kann.

§ 35. Drehungsversuche.

1. Abhängigkeit der Drehungsfestigkeit des Gusseisens von der Querschnittsform.

Diese Abhängigkeit muss bei Gusseisen wegen der Veränderlichkeit des Schubkoefficienten β in ziemlich bedeutendem Masse vorhanden sein. (Vergl. § 32.)

Verfasser hat nach der bezeichneten Richtung hin eine Anzahl von Versuchen angestellt. Ueber einen Theil derselben ist in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1889, S. 140 bis 145 und 162 bis 166 ausführlich berichtet worden.

Die je unter einer Bezeichnung aufgeführten Versuchskörper sind aus dem gleichen Material (bei demselben Gusse) hergestellt worden.

Gusseisen A.

Zugstäbe bearbeitet.

$$\text{Zugfestigkeit } K_z = \frac{1655 + 1480 + 1601}{3} = 1579 \text{ kg/qcm.}$$

a) Stäbe mit rechteckigem Querschnitt, unbearbeitet.

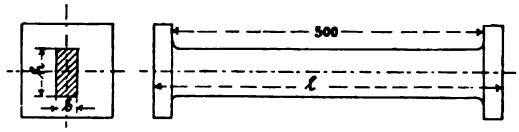


Fig. 104.

Seiten-verhältniss	Durchschnittliche Abmessungen			Drehungs-festigkeit	$\frac{K_d}{K_z}$	Bemerkungen
	l	b	h	$K_d = 4{,}5 \frac{M_d}{b^2 h}$		
	cm	cm	cm	kg/qcm		
4 Stäbe $b:h = 1:1$	53	3,15	3,20	2228	1,42	Bruch erfolgt im prismatischen Theil, Fig. 111 (Taf. IX).
4 Stäbe $b:h = 1:2{,}5$	56	3,13	7,82	2529	1,60	Bruch erfolgt in der Nähe der einen oder anderen Endplatte, Fig. 112 (Taf. IX).
4 Stäbe $b:h = 1:5$	56	3,08	15,07	2366	1,50	Desgl.
3 Stäbe $b:h = 1:9$	54	1,66	15,13	2508	1,59	Desgl.

Die Bruchfläche, Fig. 111 (Taf. IX), lässt vermuthen, dass bei den quadratischen Stäben der Bruch, der plötzlich erfolgt, in der Mitte der Seitenfläche oder wenigstens in deren Nähe begonnen habe, wie dies nach § 34, Ziff. 3 der Fall sein soll.

Bei den Stäben mit langgestreckter Form des Querschnittes scheint es dagegen, als ob der Bruch Fig. 112 (Taf. IX), welcher immer in der Nähe einer der beiden zum Einlegen in die Prüfungsmaschine dienenden Endplatten erfolgte, von aussen, d. h. von einer Ecke oder in deren Nähe seinen Anfang genommen habe.

Jedenfalls ist hieraus zu schliessen, dass K_d für die Stäbe mit langgestrecktem Querschnitt zu klein ermittelt wurde. Ferner erkennen wir, als durch den Versuch nachgewiesen, dass ein auf Drehung beanspruchter Körper, dessen Querschnitt in der einen Richtung eine wesentlich grössere Erstreckung besitzt als in der anderen, da, wo in Richtung der Stabachse der schwächere prismatische Theil an einen stärkeren anschliesst — wie im vorliegenden Falle das rechteckige Prisma an die Endplatten — die Anstrengung keine reine

Drehungsbeanspruchung mehr ist, dass vielmehr daselbst auch Normalspannungen auftreten. (Vergl. § 34, Ziff. 3.)

b) Stäbe mit kreisförmigem Querschnitt.

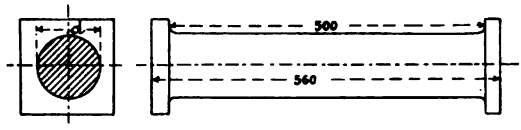


Fig. 105.

Bezeichnung	Durchmesser d cm	Drehungsfestigkeit $K_d = \frac{16}{\pi}\frac{M_d}{d^3}$ kg/qcm	$\frac{K_d}{K_z}$	Bemerkungen
3 Stäbe, unbearbeitet	10,23	1618	1,02	Bruch erfolgt plötzlich im prismatischen Theil.
1 Stab, bearbeitet	9,6	1655	1,05	Desgleichen, siehe Fig. 113 (Taf. X).

Von hohem Interesse erscheint die Bruchfläche des linken Stückes der Fig. 113 (Taf. X). Deutlich sprechen hier die kleinen, der Längsfuge anhängenden Bruchstücke dafür, dass die Trennung schliesslich — nach vorhergegangener Rissbildung unter 45° — durch Abschiebung in angenähert achsialer Richtung erfolgt ist (vergl. Fig. 88, sowie das in § 32 am Schlusse Bemerkte).

Ein Einfluss der Entfernung der Gusshaut auf die Drehungsfestigkeit kann nicht festgestellt werden, da dieselbe für die drei unbearbeiteten Stäbe zwischen 1574 und 1683 kg schwankte.

c) Hohlstäbe mit kreisförmigem Querschnitt, unbearbeitet.

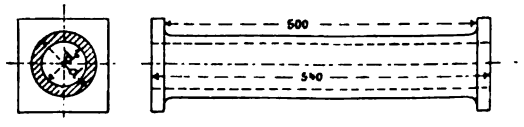


Fig. 106.

Fig. 111.

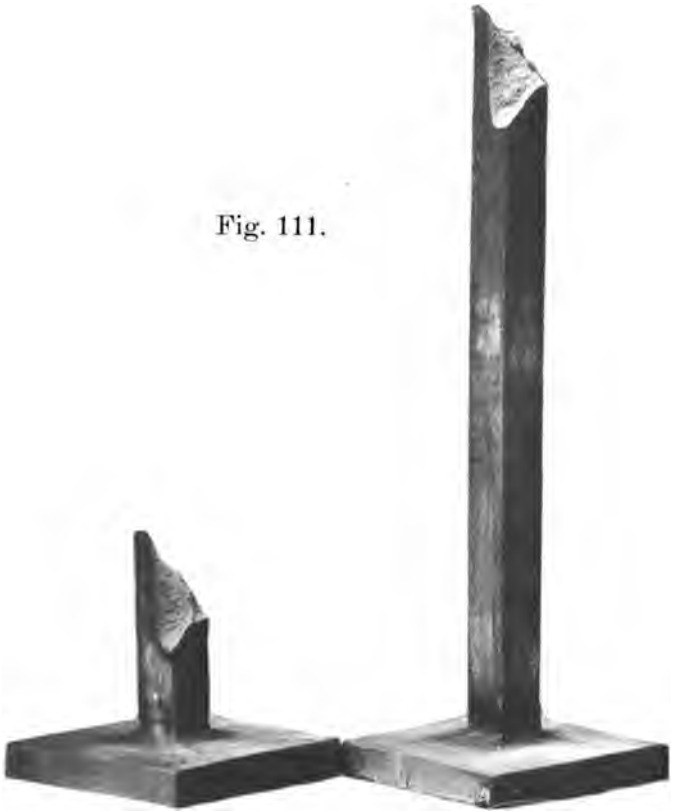


Fig. 112.

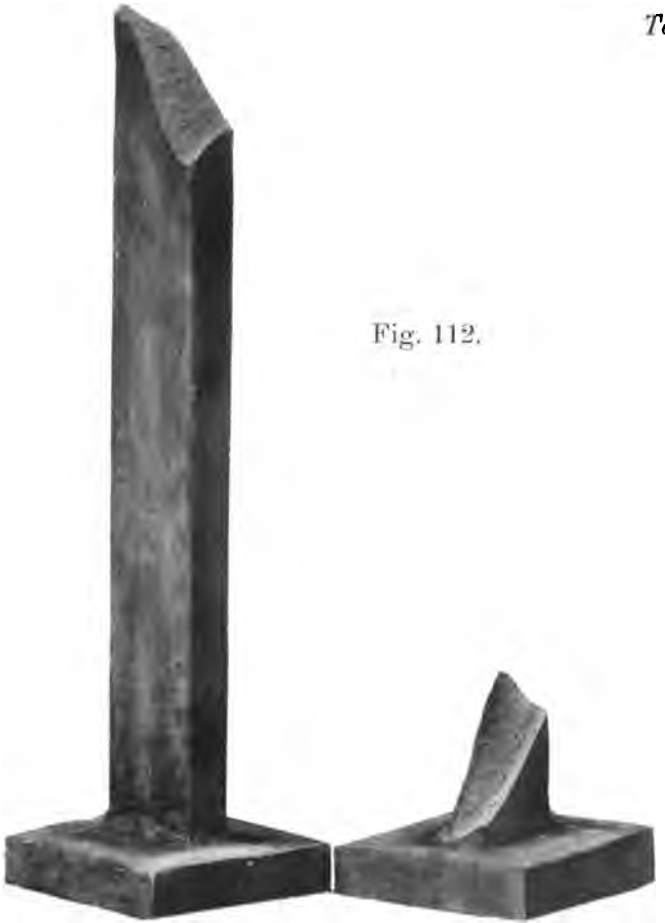


Fig. 113.

Fig. 114.

Bezeichnung	Durchmesser		Drehungsfestigkeit	$\frac{K_d}{K_z}$	Bemerkungen
	d cm	d_0 cm	$K_d = \frac{16}{\pi}\frac{M_d}{d^4 - d_0^4} d$ kg/qcm		
3 Stäbe	10,2	6,97	1297	0,82	Bruch erfolgt plötzlich im prismatischen Theil.

Hinsichtlich der Bruchfläche vergl. die zu „Gusseisen B“ gehörige Fig. 114 (Taf. X).

Die Drehungsfestigkeit nähert sich dem Werthe, welcher nach Gleichung 102 zu erwarten ist, entsprechend dem Umstande, dass die Drehungsbeanspruchung hier der einfachen Schubanstrengung ziemlich nahe gekommen ist. Für $d_0 = d$ würde die Drehungsanstrengung vollständig dieselbe sein, wie die Inanspruchnahme auf Schub.

d) Hohlstäbe mit quadratischem Querschnitt, unbearbeitet.

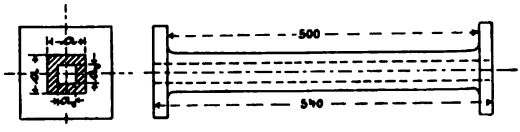


Fig. 107.

Bezeichnung	Seitenlänge		Drehungsfestigkeit	$\frac{K_d}{K_z}$	Bemerkungen
	a cm	a_0 cm	$K_d = 4{,}5\frac{M_d}{a^4 - a_0^4} a$ kg/qcm		
4 Stäbe	6,21	3,16	1788	1,13	Bruch erfolgt plötzlich im prismatischen Theil, Fig. 115 (Taf. XI).

Die Bruchfläche, Fig. 115 (Taf. XI), berechtigt zur Vermuthung, dass der Bruch in der Mitte der Seite begonnen habe.

Vergleicht man die Drehungsfestigkeit bei vollquadratischem Querschnitt (a) mit derjenigen bei hohlquadratischem, so findet sich

$$2228 : 1788 = 1{,}25 : 1.$$

Derselbe Vergleich für Vollkreis (b) mit Kreisring (c) ergiebt

$$1618 : 1297 = 1{,}25 : 1\,,$$

also dasselbe.

Beide Vergleiche lehren, dass das nach der Stabachse zu gelegene Material (Gusseisen) bei der Drehung durchaus nicht so schlecht ausgenützt wird, wie man dies anzunehmen pflegt.

Nach § 32 war, da für Gusseisen der Schubkoefficient β mit zunehmender Spannung wächst, dieses Ergebniss zu erwarten.

Es entspricht dies ganz dem Ergebnisse, zu welchem die Erörterungen in § 20, Ziff. 4, sowie die Versuche § 22, Ziff. 2 bei Biegungsbeanspruchung des Gusseisens führten.

e) Stäbe mit [-förmigem Querschnitt, unbearbeitet.

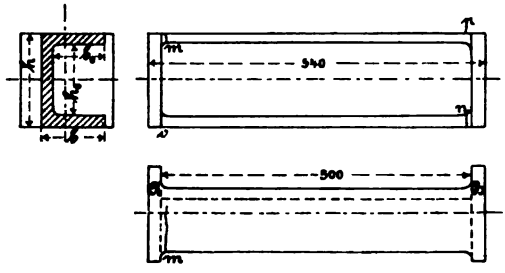


Fig. 108.

α) Verhältniss $b : h = \sim 1 : 1{,}5$.

No.	Abmessungen				Bruchmoment
	b cm	h cm	b_0 cm	h_0 cm	M_d kg. cm
1	10,3	15,1	8,6	11,9	34 000
2	10,25	15,15	8,6	11,95	33 750
3	10,3	15,2	8,6	12,0	35 500

Der Bruch beginnt damit, dass gleichzeitig oder unmittelbar auf einander folgend die beiden Querrippen von aussen einreissen

Fig. 133.

Fig. 115.

Fig. 116.

und zwar die eine bei m, die andere bei n, also diametral gegenüberliegend. Die Drehrichtung des Momentes ist hierbei derart, dass — von Platte A nach Platte B gesehen — A in der Richtung des Uhrzeigers verdreht wird.

Die oben eingetragenen Werthe von M_d sind die Drehungsmomente, welche sich unmittelbar vor diesem Einreissen der Querrippen ergaben. Sobald Letzteres erfolgt, sinkt die Schale der Kraftwage, entsprechend einer Verminderung des Momentes, welches auf den Stab wirkt. Für den Stab No. 3 wurde diese Verminderung bestimmt, weshalb dessen Verhalten noch kurz beschrieben werden soll.

Stab No. 3.

Bei $M_d = 35500$ kg. cm reissen die Querrippen an den zwei Stellen m und n von aussen ein, das Drehungsmoment sinkt auf 25250 kg. cm. Unverletzt ist in dem Querschnitt bei m beziehungsweise n noch der innere Theil der nur aussen (auf reichlich die Hälfte) gerissenen Querrippe, der Steg und die andere Querrippe bei o beziehungsweise p. Bei fortgesetzter Verdrehung steigt das Moment auf 35250 kg. cm und nimmt dann wieder ab. Der Bruch der Querrippe bei n beginnt sich in den Steg hinein zu erstrecken, schliesslich bricht dieser und bald auch die andere Querrippe bei p.

β) Verhältniss $b : h = \sim 1 : 3$.

No.	Abmessungen				Bruchmoment	
	b cm	h cm	b_0 cm	h_0 cm	M_d kg. cm	M_d' kg. cm
1	5,2	15,2	3,5	12,0	27 250	—
2	5,2	15,2	3,5	12,0	26 750	27 750
3	5,2	15,3	3,5	12,0	24 000	25 500

Bruch erfolgt in ganz ähnlicher Weise wie unter a erörtert.

Bei dem Drehungsmoment M_d reissen die Querrippen an zwei einander diametral gegenüberliegenden Stellen (m und n, Fig. 108) von aussen ein, das Drehungsmoment sinkt ein wenig (z. B. bei No. 3 von 24000 auf 23000, also um weit weniger als beim Ein-

reissen der Stäbe unter α, für welche die Breite b rund noch einmal so gross ist). Mit Wiederaufnahme der Verdrehung steigt es auf $M_d' > M_d$, den Bruch herbeiführend. Der Bruch des Steges, welch letzterer noch unterstützt wird durch die zweite unverletzte Querrippe desselben Querschnittes, fordert also ein etwas grösseres Drehungsmoment, als zum Einreissen der einen Querrippe des unverletzten Stabes nöthig ist; der Stab trägt demnach mit eingerissener Querrippe mehr, wie im unverletzten Zustande.

Für den Versuch No. 1 unter α würde Gleichung 124 mit $\varphi = \frac{8}{3}$ und bei Ersetzung von k_d durch K_d liefern

$$K_d = \frac{3}{8}\,\frac{M_d}{\Theta}\,b = \frac{3}{8}\cdot\frac{34000}{528}\cdot 10{,}3 = \sim 290 \text{ kg}.$$

Für den Versuch No. 1 unter β würde die Gleichung 124 ergeben

$$K_d = \frac{3}{8}\,\frac{M_d}{\Theta}\,b = \frac{3}{8}\cdot\frac{27250}{70{,}5}\cdot 5{,}2 = \sim 880 \text{ kg}.$$

Werden diese beiden für K_d erlangten Werthe mit der Drehungsfestigkeit rechteckiger Stäbe verglichen (a), so ergiebt sich, dass die Gleichung 124 für Körper mit Querschnitten der hier vorliegenden Art unbrauchbar ist; denn, um auf eine Spannung zu gelangen, wie sie der Drehungsfestigkeit rechteckiger Stäbe entspricht, müsste φ im ersteren Falle (290 kg) 8 mal, im letzteren (880 kg) dagegen reichlich $2\frac{1}{2}$mal so gross genommen werden.

Würde man beim Stab No. 1 unter α die Querrippen umlegen und an den Steg anschliessen, so dass ein rechteckiger Querschnitt erhalten würde von der Höhe $h + 2\,b_0 = 15{,}1 + 2\,.\,8{,}6 = 32{,}3$ cm bei einer durchschnittlichen Breite von

$$\frac{h\,(b - b_0) + 2\,b_0\,(h - h_0)}{h + 2\,b_0} = \frac{15{,}1\,.\,1{,}7 + 17{,}2\,.\,1{,}6}{32{,}3} = 1{,}64 \text{ cm},$$

so wäre mit $K_d = 2500$ (wie unter a für rechteckige Stäbe von

15,1 cm Höhe und 1,66 cm Stärke gefunden) nach Gleichung 123 auf ein Drehungsmoment von

$$M_d = \frac{2}{9} b^2 h K_d = \frac{2}{9} 1{,}64^2 . 32{,}3 . 2500 = \sim 48200 \text{ kg. cm}$$

zu rechnen. Das würde

$$100 \frac{48200 - 34000}{34000} = 42\,\%$$

mehr sein, als der rippenförmige Querschnitt thatsächlich vertrug.

Wird die Festigkeit des Stabes No. 1 unter β in Vergleich gesetzt mit der Widerstandsfähigkeit, welche sein Steg allein besitzen würde, d. h. mit

$$M_d = \frac{2}{9} (5{,}2 - 3{,}5)^2 . 15{,}2 . 2500 = \sim 24400 \text{ kg. cm},$$

so findet sich, dass der Stab No. 1 unter β nicht wesentlich mehr trägt ($M_d = 27250$ kg. cm), als der Steg für sich ohne Querrippen.

Wir erkennen hieraus, dass die untersuchten Stäbe mit [-förmigem Querschnitt gegenüber Drehungsbeanspruchung verhältnissmässig wenig widerstandsfähig sind. (Vergl. unter Gusseisen *B*, *d*).

f) Stäbe mit I-förmigem Querschnitt, unbearbeitet.

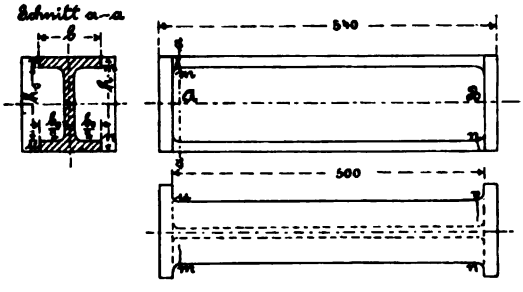


Fig. 109.

α) Verhältniss $b : h = \sim 1 : 1{,}5$.

No.	Abmessungen				Bruchmoment	
	b cm	h cm	b_0 cm	h_0 cm	M_d kg. cm	M'_d kg. cm
1	10,1	15,1	8,6	11,9	45 000	52 500
2	10,2	15,2	8,6	12,0	55 000	63 000
3	10,3	15,2	8,7	12,0	46 500	59 000

Bruch gesund.

Bei M_d reissen gleichzeitig oder unmittelbar aufeinander folgend die Querrippen an 4 Stellen von aussen ein. Ist der Drehungssinn des Momentes derart, dass beim Sehen von der Platte A gegen die Platte B hin A in der Richtung des Uhrzeigers gegenüber B verdreht wird, so reisst die untere Rippe rechts bei n, links bei u, die obere rechts bei m, links bei v von aussen ein. Mit diesem Einreissen sinkt das Moment nur sehr wenig. Bei Fortsetzung des Versuchs steigt das Moment auf M'_d, welches wesentlich grösser ist als M_d, führt in dieser Grösse den Bruch des Steges und damit des Stabes herbei. Derselbe trägt demnach mit eingerissenen Querrippen bedeutend mehr, wie im unverletzten Zustande.

β) Verhältniss $b : h = \sim 1 : 3$.

No.	Abmessungen				Bruchmoment	
	b cm	h cm	b_0 cm	h_0 cm	M_d kg. cm	M'_d kg. cm
1	5,0	15,1	3,4	11,9	32 500	33 750
2	5,0	15,2	3,4	12,0	30 750	32 250
3	5,0	15,1	3,4	11,9	28 750	30 750

Bruchfläche bei 1 und 2 gesund, bei 3 gesund bis auf eine unbedeutende Stelle.

Bruch erfolgt in ganz ähnlicher Weise wie unter α erörtert. Bei M_d beginnt das Einreissen der Querrippen, M_d' bringt den Steg und damit den Stab zum Bruche.

γ) Verhältniss $b : h = \sim 1 : 6$.

No.	Abmessungen				Bruchmoment
	b cm	h cm	b_0 cm	h_0 cm	M_d kg. cm
1	2,5	15,1	0,9	12,0	25250

Bruch erfolgt plötzlich. Bruchfläche bis auf eine sehr kleine Stelle gesund.

Wird K_d auf Grund der Gleichung 124 mit $\varphi = \frac{8}{3}$ für die Stäbe No. 3 unter α, No. 1 unter β und No. 1 unter γ berechnet, so findet sich

$$K_d = \frac{3}{8}\frac{46500}{295} \cdot 10{,}3 = 609 \text{ kg},$$

$$K_d = \frac{3}{8}\frac{32500}{37} \cdot 5 = 1641 \text{ kg},$$

$$K_d = \frac{3}{8}\frac{25250}{8{,}13} \cdot 2{,}5 = 2912 \text{ kg}.$$

Aus der Verschiedenartigkeit und der absoluten Grösse dieser Werthe erkennen wir, dass auch für I-Querschnitte die Gleichung 124 nicht verwendbar erscheint.

Würde man die Querrippen umlegen und an den Steg anschliessen, so dass je ein rechteckiger Querschnitt von

der Höhe $15{,}2 + 2 \,.\, 8{,}7 = 32{,}6$ cm, der Breite 1,6 cm, bezw.
„ „ $15{,}1 + 2 \,.\, 3{,}4 = 21{,}9$ „ „ „ 1,6 „ „
„ „ $15{,}1 + 2 \,.\, 0{,}9 = 16{,}9$ „ „ „ 1,6 „ „

sich ergäbe, so wäre mit $K_d = 2500$ nach Gleichung 123 auf ein Drehungsmoment zu rechnen von

$$M_d = \frac{2}{9} b^2 h K_d = \frac{2}{9} \cdot 1{,}6^2 \cdot 32{,}6 \cdot 2500 = \sim 46360 \text{ kg. cm, bezw.}$$

$$M_d = \frac{2}{9} \cdot 1{,}6^2 \cdot 21{,}9 \cdot 2500 = \sim 31150 \text{ kg. cm, „}$$

$$M_d = \frac{2}{9} \cdot 1{,}6^2 \cdot 16{,}9 \cdot 2500 = \sim 24040 \text{ kg. cm.}$$

Der Versuch ergab

46500, bezw. 32500, bezw. 25250,

also nur wenig hiervon verschieden, sodass ausgesprochen werden darf, dass die untersuchten I-förmigen Querschnitte hinsichtlich des Widerstandes gegen Bruch durch Drehung nahezu gleichwerthig erscheinen mit rechteckigen Querschnitten, deren Breite gleich der Steg- und gleich der Rippenstärke s und deren Höhe gleich der Summe $h + 2 b_0$, d. h.

$$M_d = \frac{2}{9} K_d s^2 (h + 2 b_0). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 125)$$

g) Stäbe mit kreuzförmigem Querschnitt, unbearbeitet.

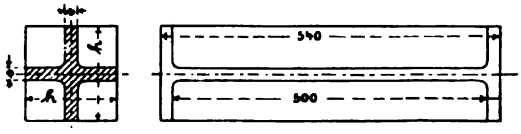


Fig. 110.

No.	Abmessungen		Trägheitsmoment	Bruchmoment	Bemerkungen
	s cm	h cm	Θ cm^4	M_d kg. cm	
1	2,14	15,2	637	72500	Bruch gesund.
2	2,14	15,1	616	73750	Bruch gesund bis auf eine ganz unbedeutende Stelle.

Der Bruch erfolgt in beiden Fällen plötzlich.

Ueber die Bruchfläche vergleiche Fig. 116 (Taf. XI). Wie ersichtlich, entstehen je bei dem Bruche 6 Stücke: die beiden Endkörper, sowie vier Dreiecke, welche aus den Rippen herausbrechen.

Die Gleichung 124 würde mit $\varphi = \frac{8}{3}$ liefern

für No. 1 $$K_d = \frac{3}{8}\frac{72500}{637} \cdot 15{,}2 = 719 \text{ kg},$$

„ „ 2 $$K_d = \frac{3}{8}\frac{73750}{616} \cdot 15{,}1 = 676 \text{ kg},$$

also einen viel zu kleinen Werth.

Aber auch eine einfache Ueberlegung zeigt, dass die Gleichung 124 für Stäbe mit kreuzförmigem Querschnitt nicht brauchbar sein kann.

Ein kreuzförmiger Querschnitt mit verhältnissmässig geringer Rippenstärke s kann in der Weise entstanden gedacht werden, dass man zwei gleiche rechteckige Querschnitte sich rechtwinklig kreuzend auf einander legt. Aus der Natur der Inanspruchnahme auf Drehung folgt dann ohne Weiteres, dass der Widerstand dieses kreuzförmigen Querschnittes doppelt so gross sein muss, wie derjenige jedes der beiden Rechtecke, sofern zunächst davon abgesehen wird, dass sich in der Mitte Theile der beiden Rechtecke decken. Nachdem nun für rechteckigen Querschnitt die Gleichung

$$M_d = \frac{2}{9} K_d b^2 h$$

als zutreffend erkannt worden ist, nach welcher die Breite b des Querschnittes das Drehungsmoment im quadratischen Verhältnisse beeinflusst, während die Höhe nur mit der ersten Potenz wirksam ist, so ergiebt sich auf Grund der eben angestellten Erwägung für den kreuzförmigen Querschnitt

$$\left.\begin{aligned} M_d &= \frac{2}{9} K_d s^2 h + \frac{2}{9} K_d s^2 (h - s), \\ &= \frac{2}{9} K_d s^2 (2h - s) \\ &= \frac{2}{9} K_d s^2 h \left(2 - \frac{s}{h}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 126)$$

d. h. wie für einen rechteckigen Querschnitt, dessen Breite gleich der Rippenstärke und dessen Höhe durch Aneinandersetzen der Rippen erhalten wird.

Zur Prüfung der so gewonnenen Gleichung 126 ziehen wir die Versuchsergebnisse heran. Dieselben liefern
für No. 1

$$K_d = 4{,}5 \frac{72500}{2{,}14^2 (2 \,.\, 15{,}2 - 2{,}14)} = 2520 \text{ kg},$$

für No. 2

$$K_d = 4{,}5 \frac{73750}{2{,}11^2 (2 \,.\, 15{,}1 - 2{,}11)} = 2655 \text{ kg},$$

Durchschnitt 2587 kg.

Dieses sind Werthe, die denjenigen entsprechen, welche unter a für rechteckigen Querschnitt erhalten worden sind. Die auf dem Wege einfacher Ueberlegung gewonnene Gleichung 126 liefert demnach Zahlen, welche mit den Versuchsergebnissen in guter Uebereinstimmung stehen.

Gusseisen B.

a) Stäbe mit quadratischem Querschnitt.

S. Fig. 104, $l = 530$.

α) Unbearbeitet.

No.	Breite b cm	Höhe h cm	Bruchmoment M_d kg. cm	Drehungsfestigkeit $K_d = 4{,}5 \frac{M_d}{b^2 h}$ kg/qcm	Bemerkungen
1	3,18	3,32	20 750	2776	Bruch gesund.
2	3,19	3,28	19 000	2561	„ „
3	3,30	3,47	21 250	2530	„ „
4	3,10	3,26	17 500	2514	Bruch gesund bis auf eine blasige Stelle.
Durchschnitt	3,22	3,34		2598	

Aus den hierbei erhaltenen Bruchstücken wurden 3 Zugstäbe herausgearbeitet.

No.	Durchmesser d cm	Querschnitt $\frac{\pi}{4} d^2$ qcm	Bruchbelastung Z kg	Zugfestigkeit $K_z = Z : \frac{\pi}{4} d^2$ kg/qcm	Bemerkungen
1	2,38	4,45	7860	1766	Bruch gesund.
2	2,37	4,41	7150	1621	„ „
3	2,38	4,45	7340	1649	„ „
		Durchschnitt		1679	

$$K_d : K_z = 2598 : 1679 = 1{,}55 : 1.$$

β) Bearbeitet.

No.	Quadratseite b cm	Bruchmoment M_d kg. cm	Drehungsfestigkeit $K_d = 4{,}5 \frac{M_d}{b^3}$ kg/qcm	Bemerkungen
1	3,00	17 250	2875	Bruch gesund.
2	3,03	16 750	2710	„ „
3	3,22	21 000	2830	„ „
4	3,20	19 250	2643	Bruch gesund bis auf eine blasige Stelle.
	Durchschnitt		2764	

Aus Rohgussstäben von 38 bis 39 mm Seite gehobelt.

$$K_d : K_z = 2764 : 1679 = 1{,}65 : 1.$$

Hiernach erscheint die Drehungsfestigkeit der bearbeiteten, also von der Gusshaut befreiten Stäbe um

$$100 \frac{2764 - 2598}{2598} = 6{,}4\,\%$$

grösser, als diejenige der unbearbeiteten Stäbe von quadratischem Querschnitt.

Die Verdrehung, namentlich auch die bleibende, welche der bearbeitete Stab bis zum Bruche erfährt, ist wesentlich grösser als diejenige des unbearbeiteten.

(Vergl. § 22, Ziff. 3, das Folgende unter b, β, sowie in diesem Paragraphen unter „Gusseisen A“, b Schlusssatz.)

b) Hohlstäbe mit kreisförmigem Querschnitt.

S. Fig. 106.

α) Unbearbeitet.

No.	Durchmesser d cm	Durchmesser d_0 cm	Bruchmoment M_d kg. cm	Drehungsfestigkeit $K_d = \frac{16}{\pi} \frac{M_d}{d^4 - d_0^4} d$ kg/qcm	Bemerkungen
1	10,2	7,0	231 500	1428	Bruch gesund.
2	10,25	6,9	243 750	1451	Bruch bis auf eine kleine Stelle gesund.
		Durchschnitt		1439	

$K_d : K_z = 1439 : 1679 = 0{,}86 : 1.$

β) Aussen abgedreht.

Ursprünglicher Durchmesser 102 mm.

No.	Durchmesser d cm	Durchmesser d_0 cm	Bruchmoment M_d kg. cm	Drehungsfestigkeit $K_d = \frac{16}{\pi} \frac{M_d}{d^4 - d_0^4} d$ kg/qcm	Bemerkungen
1	9,65	7	173 500	1360	Bruch bis auf eine ganz unerhebliche Stelle gesund, Kern um 1 mm verlegt, Bruchfläche siehe Fig. 114 (Taf. X).

$K_d : K_z = 1360 : 1679 = 0{,}81 : 1.$

Hiernach würde der bearbeitete Hohlcylinder eine etwas geringere Drehungsfestigkeit aufweisen, als die unbearbeiteten; doch kann ein Urtheil hierüber nicht gefällt werden, da der Einfluss ungleicher Wandstärke (einerseits reichlich 12, andererseits reichlich 14 mm) das Ergebniss trübt und da überdies durch Verringerung des äusseren Durchmessers das Verhältniss $d_0 : d$ grösser geworden ist. (Vergl. unter Gusseisen A, c letzten Absatz, sowie Bemerkung 1 am Schlusse des § 36.)

c) Stäbe mit ⌊-förmigem Querschnitt, unbearbeitet.

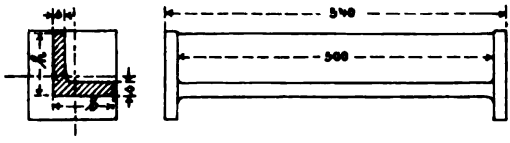


Fig. 117.

α) Seitenverhältniss $b : h = 1 : 1$.

No.	Abmessungen b cm	h cm	s cm	Bruchmoment M_d kg. cm	Drehungsfestigkeit $K_d = 4{,}5 \frac{M_d}{s^3(b+h-s)}$ kg/qcm	Bemerkungen
1	10,2	10,4	2,15	47 250	2494	Bruch gesund bis auf eine ganz unerhebliche Stelle.
2	10,2	10,2	2,15	47 250	2520	Desgleichen.
			Durchschnitt		2507	

Bruch erfolgt plötzlich, ein dreieckiges Stück in der Nähe einer der beiden Endplatten bricht heraus.

(Vergl. die Versuche unter Gusseisen A, g, Fig. 116, Taf. XI.)

β) Seitenverhältniss $b : h = 0{,}6 : 1$.

No.	Abmessungen b cm	h cm	s cm	Bruchmoment M_d kg. cm	Drehungsfestigkeit $K_d = 4{,}5 \frac{M_d}{s^2(b+h-s)}$ kg/qcm	Bemerkungen
1	6,3	10,4	2,15	37 750	2526	Bruch gesund.
2	6,0	10,3	2,10	35 000	2515	Desgl. bis auf eine unerhebliche Stelle.
			Durchschnitt		2520	

Bruch erfolgt plötzlich; ein Dreieck bricht aus, wie unter α.

γ) $b = s$, Querschnitt: Rechteck.

No.	Abmessungen b cm	h cm	Bruchmoment M_d kg. cm	Drehungsfestigkeit $K_d = 4{,}5 \frac{M_d}{b^2 h}$ kg/qcm	Bemerkungen
1	2,00	10,3	24 500	2700	Bruch gesund bis auf eine sehr kleine Stelle.
2	2,02	10,35	24 500	2611	Desgl.
3	2,02	10,35	25 250	2679	„
		Durchschnitt		2663	

Bruch erfolgt plötzlich in der Nähe einer der beiden Endplatten.

$$K_d : K_z = 2663 : 1679 = 1{,}59 : 1.$$

Werden die unter α und β auf Grund der Gleichung

$$K_d = 4{,}5 \frac{M_d}{s^2 (b + h - s)} \quad \ldots \ldots \quad 127)$$

erhaltenen Drehungsfestigkeiten verglichen mit den unter γ erzielten, so ergiebt sich das Mittel aus den Ersteren allerdings um

$$100\,\frac{2663 - 0{,}5\,(2507 + 2520)}{2663} = 5{,}7\,\%$$

geringer. Dieser Unterschied ist aber verhältnissmässig so gering, dass die Gleichung 127, welche auf dieselbe Weise wie Gleichung 125 gebildet wurde, als brauchbare Ergebnisse liefernd bezeichnet werden muss. Hierbei wird allerdings festzuhalten sein, dass die Rippenstärke wenigstens $\frac{1}{5}$ der Höhe beträgt.

d) Stäbe mit □-förmigem Querschnitt, unbearbeitet.

Fig. 108.

Die untersuchten Stäbe unterscheiden sich von den Prismen, welche aus dem Gusseisen A gefertigt worden waren und über deren Prüfungsergebnisse dort unter e berichtet wurde, dadurch, dass hier die Rippen- und Stegstärke verhältnissmässig grösser ist.

α) Höhe b_0 der Querrippen gleich der doppelten Rippenstärke.

No.	Abmessungen				Bruchmoment M_d kg. cm	Bemerkungen
	b cm	h cm	b_0 cm	h_0 cm		
1	6,1	10,2	4,0	6,1	38 500	Bruch gesund.
2	6,2	10,3	4,1	6,1	39 000	„ „

Der Bruch beginnt damit, dass gleichzeitig oder unmittelbar auf einander folgend die beiden Querrippen von aussen einreissen und zwar die eine bei m, die andere bei n, Fig. 108, also diametral gegenüber liegend.

Wird nach dem Einreissen der Rippen der Stab weiter verdreht, so setzt sich der Riss durch den Steg hindurch fort bei

nahezu derselben Belastung, welche das Einreissen der Querrippen herbeiführte.

β) Höhe b_0 der Querrippen gleich der Rippenstärke.

No.	Abmessungen				Bruchmoment M_d kg. cm	Bemerkungen
	b cm	h cm	b_0 cm	h_0 cm		
1	4,1	10,1	2,1	5,9	34 750	Bruch gesund.
2	4,2	10,0	2,05	5,9	36 250	„ „

Bruch erfolgt plötzlich an den Enden.

Die Stäbe unter α mit $b_0 = \sim 4$ cm halten hiernach nicht viel mehr als diejenigen unter β mit $b_0 = \sim 2$ cm.

Die Prüfung der Ergebnisse auf Grund der Gleichung

$$K_d = 4{,}5 \frac{M_d}{s^2 (h + 2\, b_0)}, \quad \ldots \quad 128)$$

worin

s die mittlere Steg- und Rippenstärke bezeichnet,

führt zu folgenden Werthen, wenn hierbei für s die Stegstärke gesetzt wird,

$$1\,\alpha) \qquad K_d = 4{,}5 \frac{38\,500}{2{,}1^2 (10{,}2 + 2 \,.\, 4)} = 2159 \text{ kg},$$

$$2\,\alpha) \qquad K_d = 4{,}5 \frac{39\,000}{2{,}1^2 (10{,}3 + 2 \,.\, 4{,}1)} = 2151 \text{ kg}$$

Durchschnitt 2155 kg.

$$1\,\beta) \qquad K_d = 4{,}5 \frac{34\,750}{2^2 (10{,}1 + 2 \,.\, 2{,}1)} = 2734 \text{ kg},$$

$$2\,\beta) \qquad K_d = 4{,}5 \frac{36\,250}{2{,}15^2 (10 + 2 \,.\, 2{,}05)} = 2502 \text{ kg}$$

Durchschnitt 2618 kg.

Der für die Stäbe 1 α) und 2 α) erhaltene Mittelwerth von 2155 kg bleibt um

$$100\,\frac{2663 - 2155}{2663} = \sim 19\,\%$$

unter der Drehungsfestigkeit der Stäbe mit rechteckigem Querschnitt (c, γ), während der Durchschnittswerth für die Stäbe 1 β) und 2 β) nur um

$$100\,\frac{2663 - 2618}{2663} = \sim 1{,}7\,\%$$

davon abweicht.

Der Widerstand, welchen die Stäbe unter β dem Bruche durch Drehung entgegensetzen, ist demnach so gross, wie für einen Stab mit rechteckigem Querschnitt, dessen Breite gleich dem Mittel aus der Steg- und der Rippenstärke und dessen Höhe gleich $h + 2\,b_0$. Die Stäbe unter α dagegen leisten einen wesentlich geringeren Widerstand.

Hieraus und in Erwägung des bei dem Gusseisen A unter e) gefundenen Ergebnisses schliessen wir: wenn Stäbe mit $\sqsubset$-förmigem Querschnitt gegenüber Drehungsbeanspruchung widerstandsfähig sein sollen, so müssen der Steg und die Rippen verhältnissmässig kräftig und überdies die Höhe b_0 der letzteren gering gehalten werden. Dann erreicht die Widerstandsfähigkeit diejenige eines rechteckigen Stabes, dessen Breite gleich der Steg- und Rippenstärke s und dessen Höhe gleich $h + 2\,b_0$ ist.

C. Zusammenstellung der Drehungsfestigkeit für die Querschnittsgrundformen des Kreises und des Rechteckes.

Zugfestigkeit des Gusseisens	A	1579 kg.
„ „ „	B	1679 kg.

No.	Querschnittsform	Drehungsfestigkeit			
		K_d in kg/qcm		in Theilen der Zugfestigkeit	
		A	B	A	B
1	Kreis	1618	—	1,02	—
2	Kreisring	1297	1439	0,82	0,86
3	Rechteck				
	$b : h = 1 : 1$	2228	2598	1,42	1,55
	$1 : 2{,}5$	2529	—	1,60	—
	$1 : 5$	2366	2663	1,50	1,59
	$1 : 9$	2508	—	1,59	—
4	Hohlquadrat	1788	—	1,13	—

2. Drehungswinkel.

In dieser Hinsicht liegen eine grössere Anzahl von Versuchen Bauschinger's vor.

Civilingenieur 1881, S. 115 u. f.

Bauschinger hatte sich die Aufgabe gestellt, die von de Saint-Venant herrührende Gleichung

$$\vartheta = \psi M_d \frac{\Theta'}{f^4} \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 128)$$

zu prüfen. In derselben haben ϑ M_d $\Theta' f$ und β die unter V, S. 153 angegebene Bedeutung, während ψ einen Koefficienten bezeichnet, welcher rechnungsmässig betragen soll[1])

[1]) Comptes rendus 1878, t. LXXXVII S. 893 u. f.
" " 1879, t. LXXXVIII S. 143.

für den Vollkreis, den Kreisring, die
Vollellipse, den Ellipsenring $\psi = 4\pi^2 = 39{,}5$,
für das Rechteck, wenn $h:b = 1:1$, $\psi = 42{,}68$,
„ $h:b = 2:1$, $\psi = 42{,}0$,
„ $h:b = 4:1$, $\psi = 40{,}2$,
„ $h:b = 8:1$, $\psi = 38{,}5$,
für das gleichseitige Dreieck $\psi = 45$,
für das regelmässige Sechseck $\psi = 41$,
für den Kreisausschnitt, wenn der Centriwinkel
45^0, $\psi = 42{,}9$,
90^0, $\psi = 42{,}4$,
180^0 $\psi = 40{,}8$.

Wird das gleichseitige Dreieck ausser Acht gelassen, so unterscheiden sich die Werthe von ψ nicht bedeutend, infolgedessen bereits de Saint-Venant für ψ den abgerundeten Mittelwerth 40 vorgeschlagen hat.

Bauschinger liess 5 Paar Probestücke aus Gusseisen, je von 1 m Länge, herstellen, und zwar:

a) 2 Stäbe von kreisförmigem Querschnitt,
b) 2 „ „ elliptischem „ $a:b = \sim 2:1$,
c) 2 „ „ quadratischem „
d) 2 „ „ rechteckigem „ $h:b = \sim 2:1$,
e) 2 „ „ „ „ $h:b = \sim 4:1$.

Die Grösse der Querschnitte betrug
bei den Stäben a) bis d) $f = 50$ qcm,
„ „ „ e) $f = 25$ „ .

Für gleiche Drehungsmomente (also bei im Allgemeinen ungleicher Anstrengung des Materials) lässt die Gleichung 128 mit den angegebenen Einzelwerthen von ψ Drehungswinkel ϑ_a ϑ_b ϑ_c ϑ_d ϑ_e erwarten, welche sich verhalten wie

$$\vartheta_a : \vartheta_b : \vartheta_c : \vartheta_d : \vartheta_e = 1 : 1{,}25 : 1{,}13 : 1{,}40 : 9{,}1.$$

Gemessen hat Bauschinger

$$\vartheta_a : \vartheta_b : \vartheta_c : \vartheta_d : \vartheta_e = 1 : 1{,}24 : 1{,}20 : 1{,}47 : 9{,}65.$$

Der Vergleich beider Verhältnissreihen zeigt, dass die für den kreisförmigen und für den elliptischen Querschnitt auf dem Wege des Versuches ermittelten Verhältnisszahlen mit den berechneten in sehr guter Uebereinstimmung stehen. Bei den übrigen Querschnitten ist dies nicht in dem gleichen Masse der Fall. Berücksichtigt man jedoch, dass die Entwicklung der Gleichung 128 Unveränderlichkeit des Schubkoefficienten oder Dehnungskoefficienten voraussetzt, während diese Koefficienten für Gusseisen thatsächlich veränderliche, mit wachsender Anstrengung zunehmende Werthe aufweisen, welcher Umstand bedingt, dass die bei gleichem Momente stärker angestrengten Stäbe — das Paar e) ist stärker beansprucht als d), d) bedeutender als c) und c) mehr als a) — einen grösseren Drehungswinkel ergeben müssen, als die Rechnung erwarten lässt, so darf die Uebereinstimmung der beiden Verhältnissreihen immerhin als eine gute bezeichnet werden.

Zur Prüfung der Gleichung 128 können auch noch die Drehungsversuche herangezogen werden, welche Bauschinger mit kreisförmigen und quadratischen Wellen aus verschiedenen Rohmaterialien (Siemens-Martinstahl von 6 verschiedenen Härtegraden, Bessemerstahl von 5 verschiedenen Härtegraden, Feinkorneisen und sehnigem Eisen) ausgeführt hat.

Nach Gleichung 128 ergiebt sich, da der Durchmesser bezw. die Quadratseite dieser Wellen je 100 mm betrug, dass die Drehungswinkel sich verhalten müssen wie

$$\vartheta_1 : \vartheta_2 = 4\,\pi^2\,M_d\,\frac{\frac{\pi}{32}\,10^4}{\left(\frac{\pi}{4}\,10^2\right)^4}\,\beta : 42{,}68\,M_d\,\frac{\frac{1}{6}\,10^4}{10^8}\,\beta = 1 : 0{,}698,$$

Gleichheit des Schubkoefficienten vorausgesetzt.

Die Messung an den 13 Wellenpaaren lieferte im Mittel

$$\vartheta_1 : \vartheta_2 = 1 : 0{,}696$$

allerdings mit Schwankungen der Einzelwerthe zwischen 0,633 bis 0,747. Das Mittel der beobachteten Werthe stimmt hiernach sehr gut mit der berechneten Drehung überein.

Die Herbeiführung des Bruches der oben unter a) bis e) erwähnten 10 unbearbeiteten Gusseisenkörper durch Verdrehung ergab

nach Bauschinger folgende aus Gleichung 124 berechnete Werthe für die Drehungsfestigkeit

a) Kreis $K_d = \frac{1915 + 1985}{2} = 1950$ kg,

b) Ellipse $K_d = \frac{2362 + 2720}{2} = 2541$ „

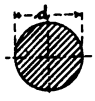
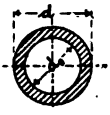
c) Quadrat $K_d' = \frac{2337 + 2569}{2} = 2453$ „

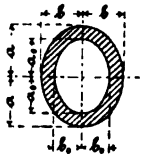
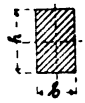
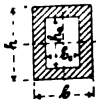
d) Rechteck $h : b = \sim 2 : 1$ $K_d = \frac{2561 + 2919}{2} = 2740$ „

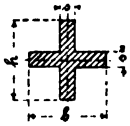
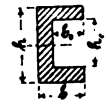
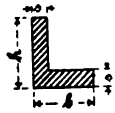
e) „ $h : b = \sim 4 : 1$ $K_d = \frac{3390 + 3134}{2} = 3262$ „ .

§ 36. Zusammenfassung.

Nach Massgabe der in den Paragraphen 32 bis 34 enthaltenen Erörterungen, sowie auf Grund der in § 35 niedergelegten Versuchsergebnisse lassen sich folgende Beziehungen zusammenstellen.

No.	Querschnittsform	Drehungsmoment M_d	Drehungswinkel ϑ	$K_d : K_z$ für Gusseisen
1		$\frac{\pi}{16} k_d d^3$	$\frac{32}{\pi} \frac{M_d}{d^4} \beta$	reichlich 1
2		$\frac{\pi}{16} k_d \frac{d^4 - d_0^4}{d}$	$\frac{32}{\pi} \frac{M_d}{d^4 - d_0^4} \beta$	„ 0,8[1])
3	$a > b$	$\frac{\pi}{2} k_d a b^2$	$\frac{1}{\pi} M_d \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} \beta$	1 bis 1,25[2])

No.	Querschnittsform	Drehungsmoment M_d	Drehungswinkel ϑ	$K_d : K_z$ für Gusseisen
4	 $a > b$ $a_0 : a = b_0 : b = m$	$\frac{\pi}{2} k_d \frac{a b^3 - a_0 b_0^3}{b}$	$\frac{1}{\pi} M_d \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3 (1 - m^4)} \beta$	0,8 bis 1[3]
5		$\frac{1}{1{,}09} k_d b^3$	$0{,}967 \frac{M_d}{b^4} \beta$	—
6	 $h > b$	$\frac{2}{9} k_d b^2 h$	für $h : b = 1 : 1$ $3{,}56 M_d \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \beta$, für $h : b = 2 : 1$ $3{,}50 M_d \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \beta$, für $h : b = 4 : 1$ $3{,}35 M_d \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \beta$, für $h : b = 8 : 1$ $3{,}21 M_d \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} \beta$.	1,4 bis 1,6[2]
7		$\frac{1}{20} k_d b^3$	$46{,}2 \frac{M_d}{b^4} \beta$	—
8	 $h > b$ $h_0 : h = b_0 : b$	$\frac{2}{9} k_d \frac{b^3 h - b_0^3 h_0}{b}$	—	1 bis 1,25[3]

No.	Querschnittsform	Drehungsmoment M_d	Drehungswinkel ϑ	$K_d : K_z$ für Gusseisen
9		$\frac{2}{9} k_d s^2 (h + 2 b_0)$	—	1,4 bis 1,6[2])
10		$\frac{2}{9} k_d s^2 (h + b - s)$	—	1,4 bis 1,6[2])
11	 $s = b - b_0 = 0{,}5(h - h_0)$	$\frac{2}{9} k_d s^2 (h + 2 b_0)$	—	1,4 bis 1,6[2])
12		$\frac{2}{9} k_d s^2 (h + b - s)$	—	1,4 bis 1,6[2])

Die Zugfestigkeiten K_z und die Drehungsfestigkeiten K_d setzen Gusseisen voraus, wie es zu zähem festem Maschinenguss Verwendung findet. Die Drehungsfestigkeiten wurden an unbearbeiteten Stäben, Fig. 104 bis Fig. 110 und Fig. 117 (in getrockneten Formen gegossen), ermittelt.

Die Versuchsstäbe No. 6 (sofern $h > b$), No. 9 bis 12 brachen immer in der Nähe der Endplatten, entsprechend dem Umstande, dass sich an diesen Stellen der Ausbildung der Querschnittswölbung ein Hinderniss bietet, welches trotz der Hohlkehle, mit welcher der prismatische Theil an die Endplatten anschliesst, hier zum Bruche führt. Der Letztere ist die Folge einer gleichzeitigen Inanspruchnahme durch Schub- und durch Normalspannungen, wie in § 34, Ziff. 3 erörtert worden ist. (Vergl. auch § 35, Gusseisen A, a.) Der ermittelte Werth von K_d muss deshalb kleiner sein, als die thatsächliche Drehungsfestigkeit. In denjenigen Fällen der Anwendung, in welchen die Sachlage hinsichtlich des Anschlusses eines auf Drehung in Anspruch genommenen Stabes an einen solchen mit grösserem Querschnitt eine ähnliche ist, wie bei den Versuchs-

körpern, schliessen die angegebenen Werthe von K_d die Berücksichtigung der gleichzeitigen Inanspruchnahme durch Normalspannungen in sich. In Fällen der reinen Drehungsanstrengung führt die Verwendung dieser Werthe zu einer etwas grösseren Sicherheit, was im Sinne des Zweckes unserer Festigkeitsrechnungen zu liegen pflegt.

Die Gleichungen für No. 11 und No. 12 bedingen kräftige Rippen, etwa von $s : h = 1 : 5$ an. Ausserdem ist für No. 11 noch zu fordern, dass b_0 nicht wesentlich mehr als $s = b - b_0$ beträgt.

[1]) Dieser Werth hängt ab von dem Verhältniss $d_0 : d$. In dem Masse, in welchem sich dasselbe der Null nähert, steigt er etwa bis reichlich 1. Die Zahl 0,8 gilt für $d_0 : d$ ungefähr gleich 0,7.

[2]) Es sind um so geringere, der kleineren Zahl näher kommende Werthe zu wählen, je mehr sich je beziehungsweise die Ellipse dem Kreise, das Rechteck dem Quadrate, der ⌶- und der ⊏-Querschnitt der Quadratform ($b_0 = 0$, $h = s$), ebenso der ┼- und der ⌊-förmige Querschnitt der Letzteren ($h = b = s$) nähern.

[3]) Hier sind die Bemerkungen [1]) und [2]) zu berücksichtigen. Je kleiner verhältnissmässig a_0 und b_0 (gegenüber a und b) beziehungsweise b_0 und h_0 (gegenüber b und h) sind, um so mehr nähert sich unter sonst gleichen Verhältnissen der Koefficient der oberen Grenze. Das Gleiche gilt, je langgestreckter der Querschnitt ist.

VI. Schub.

Der Fall der Inanspruchnahme auf Schub wird dann als vorhanden betrachtet, wenn sich die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äusseren Kräfte für den in Betracht gezogenen Querschnitt ersetzen lassen durch eine Kraft (Schubkraft), welche in die Ebene des Letzteren fällt und die Stabachse senkrecht schneidet.

Erfüllt erscheint diese Voraussetzung nur bei einer Sachlage, wie sie in Fig. 118 dargestellt ist, entsprechend dem Arbeitsvorgange bei einer Scheere zum Schneiden von Eisen. Aber auch

hier nur in dem Augenblick, in welchem der Stab von den Kanten der beiden Scheerblätter A und B gerade berührt wird; denn sobald das obere Blatt sich weiter vorwärts bewegt, dringen beide Blätter in den Stab ein, Fig. 119: an die Stelle der Berührung des Letzteren

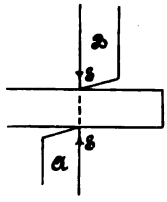


Fig. 118.

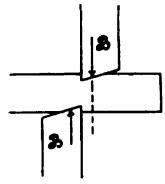


Fig. 119.

in zwei Linien durch A und B tritt eine solche in zwei Flächen. Damit rückt die obere Kraft S nach rechts, die untere nach links; es entsteht neben der Schubkraft S ein rechtsdrehendes Kräftepaar, welches Biegungsbeanspruchungen wachruft, die in dem betrachteten Beispiele allerdings zurückzutreten pflegen. Indem dieses Kräftepaar den Stab in rechtsläufigem Sinne zu drehen sucht, drückt dieser in Richtung seiner Achse auf das obere Scheerblatt nach rechts, auf das untere nach links und erfährt infolgedessen entsprechende Gegenwirkung: ein zweites linksdrehendes Kräftepaar tritt gegenüber dem Stabe in Thätigkeit.

Wir erkennen, dass — streng genommen — Schubinanspruchnahme allein niemals vorkommen kann, dass vielmehr die Schubkraft S immer von einem biegenden Moment begleitet sein wird.

§ 37. Schubanstrengung unter der Voraussetzung gleichmässiger Vertheilung der Schubspannungen über den Querschnitt.

Die Schubkraft S ruft in dem betrachteten Querschnitt Schubspannungen wach, die im Allgemeinen von Flächenelement zu Flächenelement veränderlich sein werden, und bezüglich welcher zunächst nur bekannt ist, dass sie, je multiplicirt mit dem zugehörigen Flächenelement und zusammengefasst, eine Resultante geben müssen, welche gleich und entgegengesetzt S ist. Mit der Unterstellung, dass die Schubspannungen in den verschiedenen Flächenelementen entgegengesetzt S gerichtet, also unter sich parallel sind, und die gleiche Grösse τ über den ganzen Querschnitt von der Grösse f besitzen, findet sich

$$S = \tau f \quad \text{oder} \quad \tau = \frac{S}{f}, \quad \ldots \quad 129)$$

woraus mit

k_s als zulässiger Schubanstrengung

folgt

$$S \leqq k_s f \quad \text{oder} \quad k_s \geqq \frac{S}{f}. \quad \ldots \quad 130)$$

Hinsichtlich der gemachten Annahme, betreffend die Richtung und die Grösse der Schubspannungen, ist Folgendes zu bemerken.

Greifen wir den kreisförmigen Querschnitt, Fig. 120, heraus,

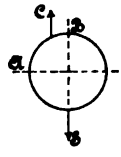


Fig. 120.

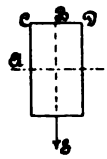


Fig. 121.

so müsste hiernach beispielsweise im Querschnittselement des Umfangspunktes C bei senkrecht nach unten wirkender Schubkraft S die Schubspannung vertikal aufwärts gerichtet sein, während sie thatsächlich in die Richtung der Tangente im Punkt C des Kreises fallen muss, es sei denn, dass in diesem Umfangspunkte eine äussere Kraft thätig wäre, welche eine andere Richtung von τ bedingen würde. In den Punkten C bis D des rechteckigen Querschnittes, Fig. 121, wird die entgegengesetzt S gerichtete Schubspannung in Wirklichkeit Null sein müssen — sofern äussere Kräfte hier nicht angreifen —, während sie nach der obigen Voraussetzung in allen Flächenelementen die gleiche Grösse besitzen sollte u. s. f.

Hieraus folgt, dass die Unterstellung, welche zu der Beziehung 129 und 130 führte, wenigstens im Allgemeinen unzutreffend ist.

§ 38. Die Schubspannungen im rechteckigen Stabe.

Wir erkannten in der Einleitung, dass die Schubkraft immer von einem biegenden Moment begleitet sein wird. Davon ausgehend, stellen wir uns die Aufgabe, für die in Fig. 122 und 123 gezeichnete Sachlage — Balken einerseits eingespannt, am anderen

freien Ende belastet — die Grösse der Schubspannungen im Abstande η von der y-Achse, die hinsichtlich der Inanspruchnahme auf Biegung als Nullachse erscheint, zu ermitteln.

Zu dem Zwecke denken wir uns ein Körperelement $ABCD$ von der Länge $x_1 - x$, der Breite b und der Höhe $e - \eta$ aus dem

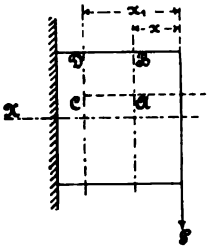


Fig. 122.

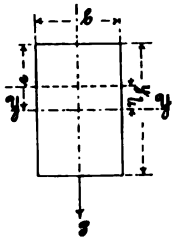


Fig. 123.

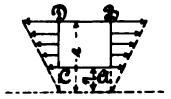


Fig. 124.

Stabe herausgeschnitten. Auf die Stirnfläche AB und CD desselben, Fig. 124, wirken Normalspannungen σ, welche mit dem Abstande η wachsen. Nach § 16 darf unter der Voraussetzung, dass der Dehnungskoefficient unveränderlich ist, diese Zunahme proportional der ersten Potenz von η gesetzt werden, wie auch Fig. 42 daselbst erkennen lässt.

Nach Gleichung 42 ist für den Querschnitt AB, da hier $M_b = P x$, die Normalspannung im Abstande η

$$\sigma_\eta = \frac{P x}{\Theta} \eta$$

und die Normalspannung im Abstande e

$$\sigma_e = \frac{P x}{\Theta} e,$$

sofern $\Theta = \frac{1}{12} b h^3$ das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die y-Achse.

Die auf die Querschnittsfläche AB von der Grösse $b\ (e - \eta)$ wirkenden Spannungen liefern zusammengefasst eine Normalkraft

$$N = \frac{\sigma_\eta + \sigma_e}{2} b\ (e - \eta) = \frac{P x}{\Theta} \frac{e + \eta}{2} b\ (e - \eta) = \frac{P x}{\Theta} \frac{e^2 - \eta^2}{2} b.$$

Für den Querschnitt CD findet sich wegen $M_b = P x_1$ auf ganz gleichem Wege diese Normalkraft zu

$$N_1 = \frac{P x_1}{\Theta} \frac{e^2 - \eta^2}{2} b.$$

Da infolge $x_1 > x$ auch $N_1 > N$ ist, so muss die Kraft

$$N_1 - N = \frac{P}{\Theta} (x_1 - x) \frac{e^2 - \eta^2}{2} b$$

durch Spannungen in der Fläche CA, deren Grösse gleich $(x_1 - x) b$, übertragen werden, sofern an der Mantelfläche BD äussere Kräfte nicht eingreifen, was vorausgesetzt werden soll. Diese in der Richtung CA wirkenden und über die Stabbreite b als gleich gross angenommenen Schubspannungen seien mit τ bezeichnet. Dann gilt

$$N_1 - N = \tau (x_1 - x) b = \frac{P}{\Theta} (x_1 - x) \frac{e^2 - \eta^2}{2} b,$$

woraus

$$\tau = \frac{P}{\Theta} \frac{e^2 - \eta^2}{2} = 6 \frac{P}{b h^3} (e^2 - \eta^2) = \frac{3}{2} \frac{S}{b h} \left\{ 1 - \left(\frac{\eta}{\frac{h}{2}} \right)^2 \right\} \quad 131)$$

unter Beachtung, dass hier $P = S$.

Die Schubspannung erlangt ihren grössten Werth für $\eta = 0$, d. i. für die Stabmitte (Nullachse). Derselbe beträgt

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{S}{b h} = \frac{3}{2} \frac{S}{f}, \quad \ldots \quad 132)$$

sofern $b h = f$ gesetzt wird.

In der Nullachse ist hiernach die Schubspannung um 50 % grösser, als bei gleichmässiger Vertheilung der Spannungen über den Querschnitt.

Für $\eta = \frac{h}{2}$, d. i. für die am weitesten von der Nullachse abstehenden Punkte, wird $\tau = 0$.

Werden in Fig. 125 die zu den einzelnen Abständen η gehörigen Werthe von τ als wagrechte Ordinaten aufgetragen, so

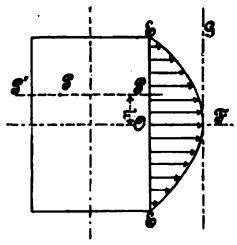


Fig. 125.

wird eine Linie EFE erhalten, welche das Aenderungsgesetz von τ klar veranschaulicht. Diese Linie ist für das Rechteck eine Parabel, deren Scheitel F um $\overline{OF} = \tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{S}{bh}$ von O abliegt, wie sich ohne Weiteres ergiebt, wenn die Senkrechte FG als Ordinatenachse gewählt wird und der Gleichung 131 die Form

$$\tau_{max} - \tau = \tau_{max}\left(\frac{\eta}{\frac{h}{2}}\right)^2$$

oder

$$\eta^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{\tau_{max} - \tau}{\tau_{max}}$$

gegeben wird.

Die vorstehende Betrachtung ermittelte die Schubspannungen in Ebenen, welche parallel zur Stabachse laufen und senkrecht zur Richtung der Schubkraft S stehen, so z. B. in einem beliebigen Punkt P der Linie $P'P'$, Fig. 125, immer diejenige Schubspannung τ, welche senkrecht zu $P'P'$ wirkt und parallel zur Stabachse (demnach senkrecht zur Bildebene, Fig. 125) gerichtet ist. Nach § 30 (vergl. auch Fig. 94) treten die Schubspannungen immer paarweise auf, derart, dass die oben erwähnte Spannung τ auch im Punkte P der Querschnittsebene, also in der Bildebene liegend, vorhanden ist. Infolgedessen ergiebt die Gleichung 131 gleichzeitig die Schubspannungen in der Querschnittsebene und zwar diejenigen, welche im Abstande η in dem Flächenstreifen $b\,d\eta$

wirksam sind. Damit ist in Gleichung 131 ebenfalls das Gesetz gewonnen, nach dem sich die Schubspannungen in der Ebene des Querschnittes vertheilen.

Die Forderung, dass diese Spannungen in den Umfangspunkten des Querschnittes immer mit der Tangente an der Begrenzungslinie zusammenfallen müssen, sofern äussere, eine andere Richtung bedingende Kräfte hier nicht angreifen, wird von diesem Vertheilungsgesetz erfüllt. In den Punkten der Begrenzungslinie AC, Fig. 121, fällt die Richtung von τ mit AC zusammen und in CBD ist $\tau = 0$.

Mit der Veränderlichkeit der Schubspannung ist naturgemäss Krümmung der ursprünglich ebenen Querschnitte verknüpft, bezüglich welcher auf § 52 verwiesen sei.

§ 39. Die Schubspannungen im prismatischen Stabe von beliebigem, jedoch hinsichtlich der Kraftebene symmetrischem Querschnitt.

Es bezeichne unter Bezugnahme auf Fig. 126

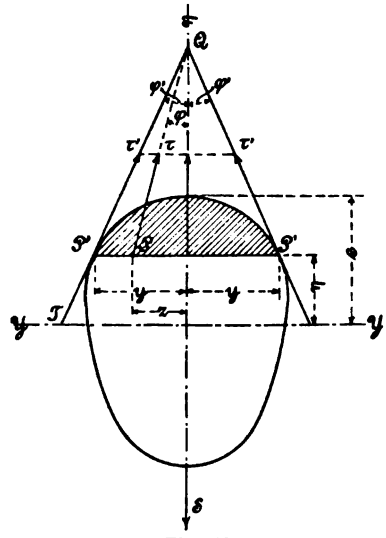


Fig. 126.

S die Schubkraft, welche in die Richtung derjenigen Hauptachse fällt, von der vorausgesetzt werde, dass sie Symmetrieebene des Querschnittes ist,

Θ das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf diejenige Achse, welche zu S senkrecht steht, d. i. die y-Achse,

f die Grösse des Querschnittes,

$2y$ die Breite des Querschnittes im Abstande η,

$M_\eta = \int_\eta^e 2\,y\,\eta\,d\eta$ das statische Moment der zwischen den Abständen η und e gelegenen (in der Figur durch Strichlage hervorgehobenen) Fläche des Querschnittes hinsichtlich der y-Achse,

φ' den Winkel, welchen die Tangente im Umfangspunkte P' mit der Symmetrieachse einschliesst,

τ' die Schubspannung, welche in dem um η abstehenden Umfangspunkte P durch S hervorgerufen wird,

k_s die zulässige Anstrengung des Materials bei Inanspruchnahme auf Schub.

Nach dem Vorgange in § 38 schneiden wir aus dem Stabe (vergleiche auch Fig. 122 und 123) ein Körperelement, Fig. 127,

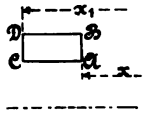


Fig. 127.

heraus. Auf das im Abstande η gelegene Flächenelement $2\,y\,d\eta$ der Stirnfläche AB wirkt die Normalspannung

$$\sigma_\eta = \frac{P\,x}{\Theta}\,\eta.$$

Hieraus ergiebt sich für die Schnittfläche AB von der Grösse $\int_\eta^e 2\,y\,d\eta$ die Normalkraft

$$N = \int_\eta^e 2\,y\,\sigma_\eta\,d\eta = \frac{P\,x}{\Theta}\int_\eta^e 2\,y\,\eta\,d\eta = P\,x\,\frac{M_\eta}{\Theta}.$$

Für die Stirnfläche CD findet sich auf ganz gleichem Wege die Normalkraft

$$N_1 = P\,x_1 - \frac{M_\eta}{\Theta}\,.$$

Demnach der Ueberschuss N_1 über N

$$N_1 - N = \frac{P}{\Theta}\,(x_1 - x)\,M_\eta.$$

Diese Kraft muss durch Schubspannungen in der Fläche CA, deren Grösse gleich $(x_1 - x)\,2\,y$ ist, übertragen werden. Dieselben, in Richtung der Stabachse, also senkrecht zur y-Achse wirkend, seien als gleich gross über die Breite $2\,y$ vorausgesetzt und mit τ_y bezeichnet. Dann folgt

$$N_1 - N = \tau_y\,.\,2\,(x_1 - x)\,y = \frac{P}{\Theta}\,(x_1 - x)\,M_\eta\,,$$

$$\tau_y = \frac{P}{2y}\,.\,\frac{M_\eta}{\Theta}\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 133)$$

Bei der vorstehenden Entwicklung wurde angenommen, dass die Aenderung des biegenden Momentes beim Vorwärtsschreiten von dem einen zu dem anderen der beiden um $x_1 - x$ von einander abstehenden Querschnitte nach Massgabe der Fig. 122 nur von der Kraft P beeinflusst werde. Für den Fall, dass diese Voraussetzung nicht zutrifft, dass vielmehr der Stab, Fig. 128, ausser durch die

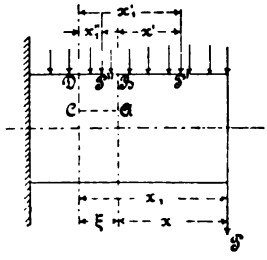


Fig. 128.

am freien Ende angreifende Kraft P auch noch sonst belastet ist: etwa durch eine Kraft P', durch die gleichmässig über ihn vertheilte Last $q\,l$, sowie durch eine zwischen den beiden Querschnitten angreifende Last P'', so findet sich

für die Stirnfläche AB, die Stirnfläche CD

das biegende Moment:

$$P x + P' x' + q \frac{x^2}{2}, \qquad P x_1 + P' x'_1 + q \frac{x_1^2}{2} + P'' x''_1,$$

die Normalspannung σ_η:

$$\frac{P x + P' x' + q \frac{x^2}{2}}{\Theta} \eta, \qquad \frac{P x_1 + P' x'_1 + q \frac{x_1^2}{2} + P'' x''_1}{\Theta} \eta,$$

die Normalkraft $\int_\eta^e 2 y \sigma_\eta \, d\eta$:

$$N = \frac{P x + P' x' + q \frac{x^2}{2}}{\Theta} M_\eta, \quad N_1 = \frac{P x_1 + P' x'_1 + q \frac{x_1^2}{2} + P'' x''_1}{\Theta} M_\eta.$$

Hieraus folgt

$$N_1 - N = \frac{P (x_1 - x) + P' (x'_1 - x_1) + \frac{q}{2} (x_1^2 - x^2) + P'' x''_1}{\Theta} M_\eta.$$

Wegen

$$\xi = x_1 - x = x'_1 - x',$$

$$\frac{x_1^2 - x^2}{2} = \frac{x_1 + x}{2} (x_1 - x) = \xi \frac{x_1 + x}{2}$$

wird

$$N_1 - N = \frac{P \xi + P' \xi + q \frac{x_1 + x}{2} \xi + P'' x_1''}{\Theta} M_\eta.$$

Diese Kraft ist durch die Schubspannungen in der Fläche CA, vom Inhalte $2 y \xi$ zu übertragen. Soll deren Grösse innerhalb dieser Fläche als konstant angenommen werden dürfen, so muss ξ unendlich klein gewählt werden. Dann ergiebt sich zunächst

$$N_1 - N = \tau_y 2 y \xi$$

und die Schubspannung:

1. für den Querschnitt CD im Abstande $x_1 = x + \xi$ vom freien Ende

$$\tau_y = \frac{P + P' + q\,\frac{x_1 + x}{2} + P''\,\frac{x''_1}{\xi}}{2\,y\,\Theta} M_\eta,$$

woraus unter Beachtung, dass, wenn ξ unendlich klein ist, $\frac{x''_1}{\xi} = 1$ sein muss,

$$\tau_y = \frac{P + P' + q\,x_1 + P''}{2\,y\,\Theta} M_\eta,$$

2. für den Querschnitt AB im Abstande x vom freien Ende

$$\tau_y = \frac{P + P' + q\,x}{2\,y\,\Theta} M_\eta.$$

Im ersteren Falle ist

$$P + P' + q\,x_1 + P'' = S,$$

und im zweiten

$$P + P' + q\,x = S.$$

Demnach allgemein

$$\tau_y = \frac{S}{2\,y}\,\frac{M_\eta}{\Theta}, \quad \ldots\ldots \quad 133)$$

ganz, wie oben schon gefunden[1]).

Dieser Werth, welcher zunächst nur die wagrechte Schubspannung bestimmt, nach § 30 aber auch gleich der senkrechten Schubspannung in demselben Punkte des in wagrechter Lage ge-

[1]) Die vorstehende Entwicklung lässt sich kürzen und allgemeiner gestalten, wenn von dem Satze Gebrauch gemacht wird, dass der erste Differentialquotient des biegenden Momentes M_b in Bezug auf x gleich der Schubkraft ist, d. h.

$$\frac{dM_b}{dx} = S.$$

Aus leicht ersichtlichem Grunde wurde dem eingeschlagenen Wege der Vorzug gegeben.

dachten Stabes ist, bedarf noch einer Ergänzung, damit die Forderung befriedigt wird, dass die Schubspannungen in den Querschnittselementen der Umfangspunkte tangential zur Begrenzungslinie gerichtet sind.

Diese Forderung bedingt beispielsweise für das im Punkte P', Fig. 126, gelegene Flächenelement, dass die Schubspannung in die Richtung der Tangente $TP'Q$ oder $QP'T$ fällt. Andererseits fanden wir oben, dass die senkrecht zur y-Achse, also parallel zur Richtung der Schubkraft wirkenden Schubspannungen die nach Gleichung 133 bestimmte Grösse τ_y besitzen müssen. Beiden Bedingungen wird durch die Annahme Befriedigung, dass die Schubspannung im Punkte P' beträgt

$$\tau' = \frac{\tau_y}{\cos\varphi'} = \frac{S}{2y\cos\varphi'}\frac{M_\eta}{\Theta} \quad \ldots \quad 134)$$

und für den beliebig zwischen $P'P'$ gelegenen Querschnittspunkt P

$$\tau = \frac{\tau_y}{\cos\varphi} = \frac{S}{2y\cos\varphi}\frac{M_\eta}{\Theta} \quad \ldots \quad 135)$$

Gleichung 135, aus welcher sich die Beziehung 134 mit $\varphi = \varphi'$ als Sonderwerth ergiebt, spricht aus, dass die sämmtlichen Schubspannungen in den um η von YY abstehenden Querschnittselementen sich in demselben Punkte Q schneiden und die gleiche Komponente τ_y in der Richtung von S besitzen.

Wegen $\tau' \leqq k_s$, ergiebt sich

$$k_s \geqq \frac{S}{2y\cos\varphi'}\frac{M_\eta}{\Theta} \quad \ldots \quad 136)$$

oder

$$S \leqq k_s \frac{\Theta}{M_\eta} 2y\cos\varphi'. \quad \ldots \quad 137)$$

Aus der Gleichung 134 folgt Nachstehendes.

a) Rechteckiger Querschnitt, Fig. 123, da hier

$$2y = b \qquad \varphi' = 0,$$

$$M_\eta = b\left(\frac{h}{2} - \eta\right)\frac{\frac{h}{2} + \eta}{2} = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \eta^2\right),$$

$$\tau' = \frac{S}{b} \frac{\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \eta^2\right)}{\frac{1}{12} b h^3} = \frac{3}{2} \frac{S}{b h}\left[1 - \left(\frac{\eta}{\frac{h}{2}}\right)^2\right]$$

und für $\eta = 0$

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{S}{b h} = \frac{3}{2} \frac{S}{f}, \quad \ldots \quad 132)$$

wie schon im § 38 ermittelt.

b) Kreisförmiger Querschnitt, Fig. 129.

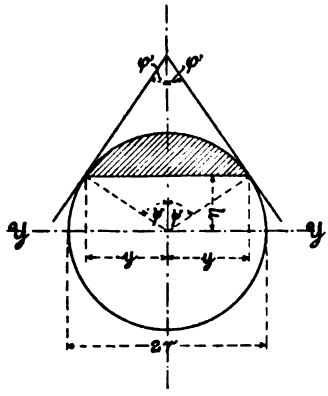


Fig. 129.

$$y = r \sin \psi = r \cos \varphi' \qquad \Theta = \frac{\pi}{4} r^4 \qquad f = \pi r^2.$$

Das statische Moment M_η des Kreisabschnittes kann unmittelbar bestimmt werden durch Integration oder auch durch die Erwägung, dass der Abstand des Schwerpunktes desselben

$$\frac{(2y)^3}{12 f_a},$$

sofern f_a den Inhalt des Abschnittes bezeichnet.

$$M_\eta = \frac{(2y)^3}{12 f_a} f_a = \frac{2y^3}{3} = \frac{2r^3 \cos^3\varphi'}{3}$$

$$\tau' = \frac{S}{2r\cos^2\varphi'} \cdot \frac{2r^3\cos^3\varphi'}{3 \cdot \frac{\pi}{4} r^4} = \frac{4}{3}\frac{S}{\pi r^2}\cos\varphi' = \frac{4}{3}\frac{S}{f}\cos\varphi' \quad 138)$$

oder auch, da

$$\cos\varphi' = \sqrt{1-\cos^2\psi} = \sqrt{1-\left(\frac{\eta}{r}\right)^2}$$

$$\tau' = \frac{4}{3}\frac{S}{f}\sqrt{1-\left(\frac{\eta}{r}\right)^2}.$$

Für $\varphi' = 0$, d. i. für die Nullachse, erlangt τ' seinen grössten Werth

$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{S}{f}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 139)$$

Bei kreisförmigem Querschnitt ergiebt sich demnach die Schubspannung in der Nullachse um $33^1/_3$ % grösser, als wenn gleichmässige Vertheilung der Schubkraft über den Querschnitt unterstellt wird.

c) Kreisringförmiger Querschnitt, Fig. 130.

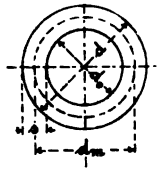


Fig. 130.

Unter der Voraussetzung, dass die Wandstärke verhältnissmässig klein ist und es sich nur um die Ermittlung der grössten, in der Nullachse auftretenden Schubspannung handelt, findet sich mit

$$2y = d - d_0 = 2s \qquad \varphi' = 0 \qquad d + d_0 = 2d_m$$

$$\Theta_z = \frac{\pi}{64}(d^4 - d_0^4) = \frac{\pi}{64}(d^2 + d_0^2)(d + d_0)(d - d_0) = \sim \frac{\pi}{8} d_m^3 s.$$

$$M_\eta = \frac{1}{2} \pi d_m s \cdot \frac{1}{\pi} d_m = \frac{1}{2} d_m^2 s,$$

$$\tau_{max} = \frac{S}{2s} \frac{\frac{1}{2} d_m^2 s}{\frac{\pi}{8} d_m^3 s} = 2 \frac{S}{\pi d_m s} = 2 \frac{S}{f}, \quad . \quad 140)$$

sofern der Querschnitt des Ringes

$$\frac{\pi}{4}(d^2 - d_0^2) = \pi d_m s = f.$$

Hiernach erscheint die Schubspannung in der Nullachse um 100 % grösser, als bei gleichmässiger Vertheilung der Spannung über den Querschnitt.

d) ⌶-Querschnitt, Fig. 131.

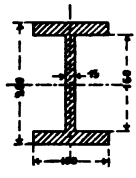


Fig. 131.

In der Mitte des Steges ist

$$2y = 1{,}5 \text{ cm} \qquad \varphi' = 0,$$

$$M_\eta = 1{,}5 \,.\, 8 \,.\, 4 + 10 \,.\, 2 \,.\, 9 = 228 \text{ cm}^3,$$

$$\Theta = \frac{1}{12}(10 \,.\, 20^3 - 8{,}5 \,.\, 16^3) = 3765 \text{ cm}^4,$$

$$\tau_{max} = \frac{S}{1{,}5} \frac{228}{3765} = 0{,}0404\, S.$$

Wegen

$$f = 10 \,.\, 20 - 8{,}5 \,.\, 16 = 64 \text{ qcm}$$

wird

$$\tau_{max} = 2{,}59 \frac{S}{f} \cdot$$

Streng genommen ist für Querschnitte dieser Art, bei denen sich die Breite $2y$ und der Winkel φ' beim Uebergang des Steges in die Flanschen plötzlich ändern, die Gleichung 134 nicht mehr richtig; jedenfalls kann sie für die Beurtheilung der Schubspannungen an dieser Uebergangsstelle und in der Nähe derselben ganz unzutreffende Werthe liefern. Da, wo ein so plötzlicher Wechsel in der Breite des Querschnittes eintritt, muss die oben gemachte Voraussetzung des Gleichbleibens von τ_y über die ganze Breite $2y$ unzulässig werden.

Die Gleichung 135 und ihre Sonderwerthe beruhen auf der Voraussetzung eines unveränderlichen Schubkoefficienten. Bei Materialien, für welche diese Voraussetzung nicht zutrifft, wie z. B. bei Gusseisen, werden dieselben unter Umständen zu mehr oder minder bedeutenden Unrichtigkeiten führen können.

§ 40. Schubversuche.

Dieselben pflegen durchgeführt zu werden nach Massgabe der Fig. 118, oder insbesondere für Rundstäbe mit der in Fig. 132

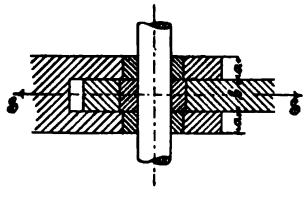


Fig. 132.

dargestellten Einrichtung, wobei der Versuchsstab in zwei Querschnitten, also doppelschnittig, durchgescheert wird.

Bedeutet S die Kraft, welche erforderlich ist, um den Stab vom Querschnitte f abzuscheeren, so wird der Quotient

$$\frac{S}{f} \text{ (Verfahren Fig. 118),}$$

bezw.

$$\frac{S}{2f} \text{ (Verfahren Fig. 132)}$$

als Schubfestigkeit oder Scheerfestigkeit des Materials bezeichnet. Der letztere Ausdruck erscheint als der zutreffendere. Es wird, namentlich durch das Verfahren, wie es Fig. 118 andeutet, weniger die Widerstandsfähigkeit ermittelt, welche bei einem auf Schub beanspruchten Konstruktionstheil nach Massgabe der Betrachtungen in den §§ 38 und 39 in Frage steht, als vielmehr diejenige Kraft, welche erforderlich ist, um den Stab durchzuschneiden. Aus diesem Grunde hat es auch Bedenken, von der so ermittelten Scheerfestigkeit auf die zulässige Schubanstrengung zu schliessen. In dieser Beziehung sei insbesondere noch auf Folgendes hingewiesen.

Nach Gleichung 102 besteht für durchaus gleichartiges Material zwischen der Schub- und Zuganstrengung die Beziehung

$$k_s = 0{,}75\, k_z \text{ bis } 0{,}8\, k_z.$$

Weiter ist beispielsweise nach Gleichung 132 für einen Stab von rechteckigem Querschnitt

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{S}{b\,h} = \frac{3}{2}\frac{S}{f},$$

woraus wegen $\tau_{max} \leqq k_s$

$$k_s \geqq \frac{3}{2}\frac{S}{f},$$

$$\frac{3}{2}\frac{S}{f} \leqq 0{,}75\, k_z \text{ bis } 0{,}8\, k_z,$$

$$\frac{S}{f} \leqq 0{,}5\, k_z \text{ bis } 0{,}53\, k_z.$$

Abscheerversuche mit Schmiedeisen und Stahl, in einer der beiden beschriebenen Weisen angestellt, liefern die Scheerfestigkeit = 0,67 bis 0,8 der Zugfestigkeit, also wesentlich höher.

Für kreisförmigen Querschnitt ist nach Gleichung 139

$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{S}{f},$$

woraus

$$\frac{S}{f} \leqq 0{,}56\, k_z \text{ bis } 0{,}6\, k_z .$$

Abscheerversuche, nach Fig. 132 durchgeführt, pflegen die Scheerfestigkeit des Schmiedeisens und des Stahles zu 0,75 bis 0,8 der Zugfestigkeit zu geben, also ebenfalls wesentlich grösser.

Die unten folgenden Versuche mit gusseisernen Rundstäben liefern sogar

Scheerfestigkeit : Zugfestigkeit = 1630 : 1595 = 1,02 : 1,
bezw. 1967 : 1679 = 1,17 : 1.

Dieses abweichende Verhalten des Gusseisens gegenüber Schmiedeisen und Stahl erklärt sich in erster Linie aus der Veränderlichkeit des Schubkoefficienten β (Dehnungskoefficienten α).

Für die Beurtheilung der beiden Prüfungsverfahren kommt sodann weiter in Betracht der oben festgestellte Umstand, dass die wirkende Schubkraft von einem biegenden Moment begleitet wird. Bei dem durch Fig. 118 angedeuteten Vorgang lässt sich dasselbe allerdings auf einen unerheblichen Betrag herabdrücken, dagegen tritt es stark auf bei dem Verfahren nach Fig. 132: wir haben thatsächlich einen im mittleren Theile (innerhalb der Strecke b) belasteten und nach aussen aufliegenden Stab. Eine scharfe Beobachtung zeigt auch deutlich, dass der Versuchskörper durch die Belastung zunächst eine Durchbiegung erfährt und dann erst abgescheert wird. Ist das Material spröde, wie z. B. Gusseisen, so erfolgt zunächst Bruch des Stabes durch das biegende Moment und zwar innerhalb der Strecke b; erst später (bei höherer Belastung) tritt das Abscheeren ein. In dieser Hinsicht geben die nachstehenden Versuche des Verfassers lehrreichen Aufschluss.

Rundstäbe von 20,0 mm Durchmesser ($f = 3{,}14$ qcm), aus Gusseisen gedreht, geprüft nach dem Verfahren Fig. 132.

No. 1. Bei der Belastung $S = 3000$ kg bricht der Stab infolge Biegung, die Wage der Maschine sinkt. Der Versuch wird fortgesetzt, hierbei steigt die Belastung allmählich bis $S = 10200$ kg, welche Kraft das Abscheeren herbeiführt[1]).

Fig. 133 (Taf. XI) zeigt den an den Enden auf die Länge b abgescheerten und im mittleren Theile durch Biegung gebrochenen Stabtheil. Die von dem biegenden Moment gezogenen Fasern sind gerissen, während die gedrückten zum Theil noch unangegriffen erscheinen.

$$\text{Die Scheerfestigkeit beträgt } \frac{10200}{2 \,.\, 3{,}14} = 1635 \text{ kg.}$$

No. 2. Bei der Belastung $S = 2825$ kg bricht der Stab infolge der Biegung (d. h. die gezogenen Fasern zerreissen), bei $S = 9950$ kg erfolgt das Abscheeren.

$$\text{Scheerfestigkeit} = \frac{9950}{2 \,.\, 3{,}14} = 1593 \text{ kg.}$$

No. 3. Verhalten ganz wie bei No. 1 und 2, $S = 3350$ kg, beziehungsweise 10370 kg.

$$\text{Scheerfestigkeit} = \frac{10370}{2 \,.\, 3{,}14} = 1662 \text{ kg.}$$

$$\text{Durchschnitt der Scheerfestigkeiten} = \frac{1635 + 1593 + 1662}{3} = 1630 \text{ kg.}$$

Eine genaue Bestimmung der Biegungsfestigkeit ist nicht möglich, da die Feststellung des biegenden Moments M_b die Kenntniss der Vertheilung der Belastung über die Strecken a, a und b voraussetzt, und überdies neben der Biegungsanstrengung auch Schubanstrengung stattfindet. Ausserdem kommt noch der Einfluss der

[1]) Diese Erscheinung der Aufeinanderfolge des Biegungsbruches und des Abscheerens, sowie der grosse Unterschied zwischen den betreffenden Belastungen sind um so bemerkenswerther, als die Biegungsfestigkeit gusseiserner Rundstäbe das Doppelte der Zugfestigkeit übersteigt. (Vergl. § 22, Ziff. 2.)

Reibungskräfte in Betracht, welche durch die Biegung des Stabes in den Auflagerflächen wachgerufen werden. (Vergl. § 46, oder auch Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1888, Fussbemerkung auf S. 224 u. f.) Wird in Uebereinstimmung mit Fig. 134

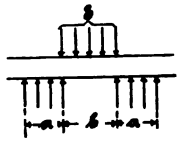


Fig. 134.

gleichmässige Vertheilung unterstellt und der Einfluss des Reibungswiderstandes vernachlässigt, so wäre

$$M_b = \frac{S}{2}\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{b}{4}\right) = \frac{S}{4}\left(a+\frac{b}{2}\right)$$

und, da im vorliegenden Falle

$$a = 2{,}2\text{ cm} \qquad b = 3{,}0\text{ cm} \qquad \frac{\Theta}{e} = \frac{\pi}{32}2^3,$$

die Biegungsfestigkeit K_b

für No. 1 $$\frac{\frac{3000}{4}(2{,}2+1{,}5)}{\frac{\pi}{32}\cdot 2^3} = \frac{3000\,.\,3{,}7}{3{,}14} = \sim 3530\text{ kg},$$

für No. 2 $$\frac{2825\,.\,3{,}7}{3{,}14} = \sim 3330\text{ kg},$$

für No. 3 $$\frac{3350\,.\,3{,}7}{3{,}14} = \sim 3950\text{ kg},$$

im Durchschnitt $K_b =$ 3603 kg.

Die Zugprobe mit denselben Rundstäben hatte ergeben die Zugfestigkeit

für No. 1 1560 kg,
für No. 2 1586 kg,
für No. 3 1640 kg,

im Durchschnitt $K_z = 1595$ kg.

Nach § 22, Ziff. 2, Gusseisen A, S. 111, No. 6, wäre hieraus auf eine Biegungsfestigkeit von

$$K_b = 2{,}12 \; K_z = 1595 \,.\, 2{,}12 = 3381 \text{ kg}$$

zu schliessen, welche Grösse nicht sehr bedeutend abweicht von derjenigen, die auf Grund der Annahme gleichmässiger Vertheilung der Kräfte über die Strecken a, a und b erhalten wurde. Würde der das biegende Moment vermindernde Einfluss der Reibung berücksichtigt worden sein, so wäre eine noch weiter gehende Uebereinstimmung eingetreten.

Rundstäbe von rund 24 mm Durchmesser aus Gusseisen gedreht, geprüft nach Fig. 132.

No.	Durchmesser d cm	Querschnitt $\frac{\pi}{4} d^2$ qcm	Belastung S beim Bruch durch: Biegung S_1 kg	Belastung S beim Bruch durch: Abscheeren S_2 kg	Scheerfestigkeit $K_s = S_2 : 2\frac{\pi}{4} d^2$ kg/qcm
1	2,38	4,45	7600	17 650	1973
2	2,37	4,41	8250	17 060	1934
3	2,38	4,45	8450	17 750	1994
				Durchschnitt	1967

Die Zugfestigkeit der drei Stäbe war vorher zu

$$K_z = \frac{1766 + 1621 + 1649}{3} = 1679 \text{ kg}$$

ermittelt worden.

Wird Schmiedeisen der Prüfung nach Fig. 132 unterworfen, so erfolgt allerdings vor dem Abscheeren kein Bruch, weil das Material dem biegenden Momente gegenüber eine genügend weitgehende Formänderung zulässt. Da aber bei Konstruktionstheilen derartige Formänderungen in der Regel nicht statthaft erscheinen, so erhellt, dass selbst in Fällen der Beanspruchung, wie sie durch Fig. 132 dargestellt wird, die Berechnung auf Biegung — wenigstens der Regel nach — massgebend ist[1]).

---

[1]) In dieser Hinsicht bringt die Literatur noch häufig irrthümliche Angaben, obgleich sie hiermit schon seit langer Zeit und naturgemäss im Widerspruch mit dem steht, was zweckmässiger Weise thatsächlich ausgeführt wird. So pflegt beispielsweise in Beziehung auf die Gelenkbolzen bei Dachkonstruktionen u. dergl., für die Keile der Keilverbindungen, die Bolzen gewisser Schraubenverbindungen, die Zähne der Sperrräder u. s. f. angegeben zu werden, dass dieselben auf Schub oder gegen Abscheeren zu berechnen seien. Hinsichtlich der Gelenkbolzen und ähnlicher Theile dürfte das oben Erörterte zur Klarstellung ausreichen (vergl. auch § 52, Ziff. 1a), betreffs der Keile, Gewindegänge u. s. f. sei auf des Verfassers Maschinenelemente 1880, S. 41 u. f. (Taf. 1, Fig. 28 und 30), bezw. S. 50, S. 238, 1891/92, S. 80 u. f., S. 92 u. s. w. verwiesen. In Bezug auf Sperrzähne möge das Folgende bemerkt werden.

Die Kraft P, Fig. 135, im ungünstigsten Falle aussen im Punkt B angreifend (vergl. Schlussabsatz dieser Fussbemerkung), ergiebt in Bezug auf den zunächst

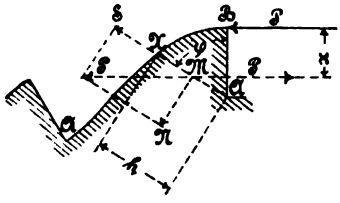


Fig. 135.

beliebig unter dem Winkel φ angenommenen Bruchquerschnitt AX mit dem Mittelpunkt M ein Kräftepaar vom Moment Px, welches auf Biegung wirkt, ferner eine Schubkraft $S = P \sin \varphi$ und eine Druckkraft $N = P \cos \varphi$, welch' letztere in der Regel ohne Weiteres vernachlässigt werden kann.

Bezeichnet b die Breite der Sperrzähne, so findet sich die grösste Biegungsanstrengung σ des Materials nach Gleichung 43 zu

$$\sigma = \frac{Px}{\frac{1}{6} b h^2} = 6 \frac{Px}{b h^2} .$$

Durch Verminderung von b und a kann allerdings das biegende Moment verringert werden; gleichzeitig wächst aber dann die Pressung $S : b\,d$ gegen die Mantelfläche des Rundstabes. Hierdurch aber wird der Verringerung von a und damit auch derjenigen des biegenden Momentes eine Grenze gezogen.

Da die Widerstandsfähigkeit des Stabes vom Durchmesser d gegen Biegung der dritten Potenz von d, gegen Schub dagegen nur der zweiten Potenz von d proportional ist, so muss das Prüfungsverfahren nach Fig. 132 für das gleiche Material unter sonst gleichen Verhältnissen Werthe für die Schubfestigkeit $S : f$ liefern, welche von d abhängig sind. Durch die grossen Pressungen gegen die Mantelflächen der abzuscheerenden Cylinder, welche Kräfte ihrerseits gegenüber dem Bestreben des Stabes, auf der

---

Es ist nun derjenige Querschnitt festzustellen, für welchen σ den grössten Werth erlangt, was bei im Allgemeinen beliebiger Gestalt der Begrenzungslinie des Zahnes am einfachsten durch Ausproben geschieht.

Zur Biegungsspannung tritt nun allerdings die Schubanstrengung. Wie in § 52 unter Ziff. 1 b erörtert werden wird, ergiebt sich jedoch für den rechteckigen Querschnitt, dass die Biegungsanstrengung allein massgebend ist, so lange

$$\frac{x}{\sin\varphi} \geqq 0{,}325\,h,$$

d. h. so lange

$$x \geqq 0{,}325\,h \sin\varphi.$$

Diese Bedingung wird fast ausnahmslos erfüllt sein, infolgedessen Sperrzähne ebenso ausnahmslos auf Biegung zu berechnen sind.

Indem der Bruchquerschnitt durch A geführt wird, wie oben geschehen, ist vorausgesetzt, es habe die Begrenzungslinie des Zahnes eine solche Form, dass die Widerstandsfähigkeit der oberhalb A möglichen Bruchquerschnitte einen grösseren oder mindestens den gleichen Werth besitzt. Wird P als ganz aussen angreifend angenommen, wie in Fig. 135 gezeichnet, so trifft diese Voraussetzung bei den üblichen Zahnformen allerdings nicht zu, wohl aber dann, wenn die Angriffslinie von P — in Uebereinstimmung mit der Wirklichkeit — um eine kleine Strecke von B nach innen verlegt wird. Beim Entwerfen pflegt man in der Weise vorzugehen, dass die Begrenzungslinie des Zahnes gewählt und sodann untersucht wird, ob die Beanspruchung die zulässige Anstrengung des Materials in keinem der möglichen Bruchquerschnitte überschreitet. Bei Inbetrachtziehung von Querschnitten, die oberhalb A gelegen sind, ist sinngemäss in der gleichen Weise vorzugehen, wie oben für den durch A gehenden Querschnitt dargelegt wurde.

Unterlage zu gleiten, Reibungskräfte wachrufen (vergl. § 46), findet allerdings eine weitere Trübung dieses Verhältnisses statt.

Das vorstehend Erörterte führt zu dem Ergebniss, dass die Schubversuche, wie sie angestellt zu werden pflegen, nicht geeignet sind, die Richtigkeit der Hauptgleichung (134) zu prüfen, noch die Unterlagen für die zulässigen Schubanstrengungen mit der wünschenswerthen Genauigkeit zu liefern. Eine unmittelbare und genaue Prüfung der Gleichung 134 auf dem Wege des Versuches begegnet erheblichen Schwierigkeiten. Dieselben erwachsen aus dem Umstande, dass die Schubkraft immer von einem biegenden Moment begleitet ist, und dass da, wo dessen Einfluss zurücktritt, so bedeutende Kräfte auf verhältnissmässig kleine Theile der Mantelfläche des Stabes zusammengedrängt wirken müssen, dass die den weiteren Entwickelungen zu Grunde liegende Voraussetzung des Nichtvorhandenseins von Normalspannungen senkrecht zur Stabachse — und unter Umständen derjenigen des Nichtauftretens von senkrecht zur Stabachse stehenden Schubanstrengungen, welche in Ebenen wirken, die sich in Parallelen zur Achse schneiden, — unerfüllt bleibt.

Dritter Abschnitt.

Formänderungsarbeit gerader stabförmiger Körper bei Beanspruchung auf Zug, Druck, Biegung, Drehung oder Schub.

§ 41. Arbeit der Längenänderung.

Ein prismatischer Stab von der Länge l und dem Querschnitt f sei an dem einen Ende festgehalten, am anderen freien Ende durch eine von Null an stetig wachsende Kraft P belastet. Er erfährt hierdurch eine Verlängerung um λ. Das Gesetz, nach welchem sich λ mit P ändert, wird, wie bereits in § 2 erörtert worden, durch die Linie der Dehnungen dargestellt.

Fig. 3 am genannten Ort zeigt z. B. diese Kurve $OQABC$ für Schmiedeisen mit OX als Achse der Belastungen P und OY als Achse der Verlängerungen λ. Von O bis A verläuft die Linie als Gerade, so dass der Quotient $\overline{A_1 A} : f$ die Spannung an der Proportionalitätsgrenze ergiebt.

Fig. 6 (§ 4) giebt in OAC die Linie der Dehnungen für einen Kupferstab. Hier besteht ebenfalls Proportionalität zwischen Dehnungen und Belastungen bis zum Punkt A.

In Fig. 64 (§ 20) ist die Dehnungslinie für Gusseisen dargestellt und zwar giebt OZ den Zweig für Zug- und OD denjenigen für Druckspannungen. Hier besteht Proportionalität zwischen Belastungen und Verlängerungen überhaupt nicht; die letzteren wachsen vielmehr rascher als die ersteren. Demgemäss kehrt die Kurve der wagrechten Achse, d. i. der Achse der Dehnungen, die hohle Seite zu.

Andere Stoffe (Treibriemenleder, Hanfseile u. s. w.) verhalten sich umgekehrt, indem bei ihnen die Verlängerungen langsamer wachsen als die Belastungen. Die Linie der Dehnungen

kehrt dann der wagrechten Koordinatenachse die erhabene Seite zu, wie dies Fig. 136, welche die Dehnungslinie für einen Treibriemen wiedergiebt, erkennen lässt[1]).

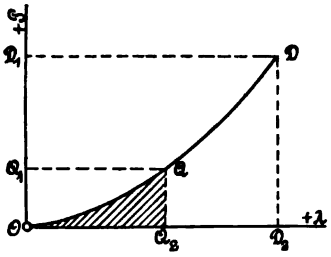


Fig. 136.

Im Allgemeinen ist hiernach die Linie der Dehnungen oder Verlängerungen eine Kurve.

Die mechanische Arbeit, welche aufzuwenden ist, den Stab z. B. um $\lambda = \overline{OQ_2}$ (Fig. 3, Fig. 136) zu verlängern, wozu die von Null an gewachsene Belastung $P = \overline{OQ_1} = \overline{Q_2Q}$ gehört, wird dargestellt durch die schraffirte Fläche OQQ_2 und allgemein als Formänderungsarbeit (Deformationsarbeit), im besonderen vorliegenden Falle als Arbeit der Längenänderung bezeichnet. Ihre Grösse A beträgt

$$A = \int P d\lambda,$$

wobei die Integration von 0 bis zum Endwerth von λ zu erfolgen hat.

Unter der Voraussetzung, dass Proportionalität zwischen Belastungen und Verlängerungen besteht, dass also die Dehnungslinie eine Gerade ist, wie z. B. in Fig. 3 bis zum Punkte A, wird

$$A = \frac{1}{2} P \lambda = \frac{1}{2} f \sigma \lambda,$$

und da nach § 2, sofern Kräfte senkrecht zur Stabachse nicht wirken,

$$\lambda = \alpha \sigma l$$

[1]) S. des Verfassers Versuche über die Elasticität von Treibriemen und Treibseilen, Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1887, S. 221 u. f., S. 241 u. f., sowie S. 891.

$$A = \frac{1}{2} \alpha \sigma^2 f l = \frac{1}{2} \alpha \sigma^2 V, \quad \ldots \quad 141)$$

d. h. die Arbeit der Längenänderung ist proportional dem Volumen $V = f l$ des Stabes und dem Quadrate der Spannung.

Wird σ durch die verhältnissmässige Dehnung ε ersetzt nach Massgabe der Gleichung

$$\varepsilon = \alpha \sigma,$$

so folgt

$$A = \frac{1}{2\alpha} \varepsilon^2 f l = \frac{1}{2\alpha} \varepsilon^2 V. \quad \ldots \quad 141a)$$

Handelt es sich um einen Körper von veränderlichem Querschnitt, wie Fig. 7, § 6, so ergiebt sich unter der Voraussetzung, dass der Dehnungskoefficient α konstant ist und Kräfte senkrecht zur Stabachse nicht thätig sind, die Arbeit A mit Annäherung[1]) durch folgende Erwägung.

Damit das im Abstande x von der freien Stirnfläche des Stabes, Fig. 7, gelegene Körperelement $f\,dx$ in der Richtung von x um $\varepsilon\,dx$ gedehnt wird, wobei die Spannung

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

eintritt, bedarf es der Aufwendung einer Arbeit

$$dA = \frac{1}{2} f \sigma \,.\, \varepsilon\, dx = \frac{1}{2\alpha} f \varepsilon^2\, dx = \frac{\alpha}{2} f \sigma^2\, dx.$$

Folglich die Arbeit, welche die Formänderung des ganzen Stabes fordert,

$$A = \frac{1}{2\alpha} \int_0^l \varepsilon^2 f\, dx = \frac{\alpha}{2} \int_0^l \sigma^2 f\, dx. \quad \ldots \quad 142)$$

---

[1]) Mit Annäherung namentlich deshalb, weil die Spannungen in sämmtlichen Punkten eines Querschnittes nicht die gleiche Richtung haben können. Die Spannung im Mittelpunkte des Querschnitts fällt allerdings in die Stabachse, steht also senkrecht zu letzterem, dagegen werden beispielsweise die Spannungen in den auf der Umfangslinie des Querschnitts liegenden Elementen die Richtung der Mantellinien des Stabes besitzen, also geneigt gegen die Stabachse sein müssen.

Für den Fall, dass der Stab ein Prisma, wird hieraus

$$A = \frac{1}{2\alpha} \varepsilon^2 f l = \frac{\alpha}{2} \sigma^2 f l,$$

wie oben bereits ermittelt worden ist.

Bei den vorstehenden Erörterungen wurde vorausgesetzt, dass die Belastung stetig von Null an wächst, sodass in jedem Augenblick Gleichgewicht vorhanden ist zwischen der äusseren belastenden Kraft und den hierdurch wachgerufenen inneren Kräften. Wird nun der Stab plötzlich der Einwirkung der ganzen Kraft P überlassen, ohne dass jedoch ein Stoss hierbei stattfindet, d. h. ohne dass der zweite, den Stab belastende Körper diesen mit einer gewissen Geschwindigkeit trifft, so erhebt sich die Frage nach der Grösse der Anstrengung σ, welche das Material in dem Augenblick der grössten Verlängerung λ des Stabes erleidet. Bei der im Folgenden gegebenen Beantwortung, wobei ein prismatischer Stab zu Grunde gelegt wurde, soll von dem Einflusse der Zeit auf die Ausbildung der Formänderung abgesehen werden.

Unter der Voraussetzung unveränderlicher Grösse des Dehnungskoefficienten α beträgt die Arbeit, welche die Ueberwindung der inneren, durch die Dehnung wachgerufenen Kräfte bei der Verlängerung λ fordert,

$$\frac{1}{2} \lambda f \sigma.$$

Dieselbe muss gleich sein derjenigen mechanischen Arbeit, welche die äussere Kraft P verrichtet, indem sie in ihrer Richtung um λ fortschreitet, d. i. $P\lambda$. Also

$$P\lambda = \frac{1}{2} \lambda f \sigma,$$

woraus

$$\sigma = 2 \frac{P}{f},$$

d. h. die den Stab mit ihrer ganzen Grösse plötzlich, jedoch ohne Stoss belastende Kraft P veranlasst eine doppelt so grosse Anstrengung des Materials, als wenn P von Null an stetig gewachsen wäre.

Nachdem der Stab sich um λ gedehnt hat, in welchem Augenblick $\sigma f = 2P$ ist, werden die inneren Kräfte, da sie um P grösser sind als die äussere Kraft P, eine Wiederverkürzung einleiten, welche für den Fall vollkommener Elasticität und abgesehen von Widerständen die Stablänge auf l zurückbringt; hieran schliesst sich neuerlich eine Verlängerung u. s. f.: der Stab wird Schwingungen vollführen, welche, wegen der in Wirklichkeit vorhandenen Widerstände fort und fort abnehmend, schliesslich Null werden.

§ 42. Arbeit der Biegung.

Der Körper sei in der Weise gestützt und belastet, dass der Fall der einfachen Biegung vorliegt (III, § 16). Unter Vernachlässigung der Schubkräfte, sowie der örtlichen Zusammendrückung, welche der Körper da erfährt, wo die äusseren Kräfte auf die Oberfläche wirken, und unter der Voraussetzung, dass der Dehnungskoefficient α konstant ist, ergiebt sich die Biegungsarbeit durch folgende Betrachtung.

Um das im Abstande η von der Nullachse gelegene, streifenförmige Körperelement vom Querschnitt df und der Länge dx (in Richtung der Stabachse), Fig. 40 (§ 16), so zu dehnen, dass dessen Länge die verhältnissmässige Dehnung ε erfährt, wobei die Normalspannung

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

eintritt, ist eine Arbeit

$$dA = \frac{\sigma\, df}{2}\, \varepsilon\, dx = \frac{\alpha}{2}\, \sigma^2\, df\, dx$$

erforderlich.

Unter der Annahme, dass die Ebene des den Stab biegenden Kräftepaares von Momente M_b die eine der beiden Hauptachsen des Querschnittes, dessen Trägheitsmoment in Bezug auf die andere Hauptachse mit Θ bezeichnet sei, in sich enthält, gilt nach Gl. 42

$$\sigma = \frac{M_b}{\Theta}\, \eta.$$

Infolgedessen

$$dA = \frac{\alpha}{2} \frac{M_b^2}{\Theta^2} \eta^2 \, df \, dx,$$

und hiermit die mechanische Arbeit, welche die Biegung des ganzen Körpers beansprucht,

$$A = \frac{\alpha}{2} \int \frac{M_b^2}{\Theta^2} dx \int \eta^2 \, df = \frac{\alpha}{2} \int \frac{M_b^2}{\Theta} dx, \quad . \quad . \quad 143)$$

wobei die Integration sich auf die ganze Länge des Stabes zu erstrecken hat.

Für den Fall Fig. 37 — der prismatische Stab ist an dem einen Ende befestigt, am anderen freien Ende durch die Kraft P belastet — findet sich, sofern man, von B nach A hin schreitend, $(l—x)$ mit ξ bezeichnet und dementsprechend $M_b = P\xi$ einführt, sowie dx durch $d\xi$ ersetzt,

$$A = \frac{\alpha}{2} \int_0^l \frac{P^2 \xi^2}{\Theta} d\xi = \frac{\alpha}{6} \frac{P^2}{\Theta} l^3.$$

Diese Gleichung gestattet eine sehr rasche Feststellung der Durchbiegung y' des freien Stabendes durch die Erwägung, dass die mechanische Arbeit, welche die stetig von Null bis auf P gewachsene Belastung beim Sinken um y' verrichtet, d. i.

$$\frac{1}{2} P y',$$

gleich A sein muss.

Demnach

$$\frac{1}{2} P y' = \frac{\alpha}{6} \frac{P^2}{\Theta} l^3,$$

$$y' = \frac{\alpha}{3} \frac{P}{\Theta} l^3,$$

welches Ergebniss in Uebereinstimmung mit Gl. 54 steht, sofern man in letzterer die hier nicht vorhandene Belastung Q gleich Null setzt.

Wird die Anstrengung an der Befestigungsstelle im Abstande $\eta = e_1$ von der Nullachse mit k_b bezeichnet, so folgt

$$P\,l = k_b \frac{\Theta}{e_1}$$

und damit

$$A = \frac{\alpha}{6} k_b^2 \frac{\Theta}{e_1^2}\, l.$$

Wenn

$$\Theta = \iota f e_1^2$$

gesetzt wird, was z. B. ergiebt für den rechteckigen Querschnitt

$$\Theta = \frac{1}{12} b h^3 = \iota\, b h \left(\frac{h}{2}\right)^2 \qquad \iota = \frac{1}{3},$$

für den kreisförmigen Querschnitt

$$\Theta = \frac{\pi}{64} d^4 = \iota \frac{\pi}{4} d^2 \left(\frac{d}{2}\right)^2 \qquad \iota = \frac{1}{4},$$

so findet sich unter Beachtung, dass $f\,l$ gleich dem Stabvolumen V

$$A = \frac{\alpha}{6} \iota\, k_b^2 f\, l = \frac{\alpha}{6} \iota\, k_b^2\, V, \quad \ldots \quad 144)$$

d. h. die Biegungsarbeit ist proportional dem Volumen des Stabes und dem Quadrate der Materialanstrengung.

Handelt es sich um einen Körper von gleichem Widerstande gegen Biegung (§ 19), so ist

$$k_b = \frac{M_b}{\Theta} e$$

für die einzelnen Querschnitte konstant, wobei unter e der Abstand der hinsichtlich der grössten Anstrengung massgebenden Faser verstanden werden soll. Durch Einführung des hieraus folgenden Werthes von M_b in Gl. 143 wird

$$A = \frac{\alpha}{2} \int \left(\frac{\Theta\, k_b}{e}\right)^2 \frac{dx}{\Theta} = \frac{\alpha}{2} k_b^2 \int \frac{\Theta}{e^2}\, dx,$$

und mit Rücksicht darauf, dass $\Theta = \iota f e^2$,

$$A = \frac{\alpha}{2} \iota k_b^2 \int_0^l f \, dx = \frac{\alpha}{2} \iota k_b^2 V. \quad . \quad . \quad . \quad 145)$$

Hiernach ist die Biegungsarbeit eines Körpers von gleichem Widerstand bei bestimmter Querschnittsform

1. unabhängig von der Art der Unterstützung (Befestigung) und der Belastung,
2. proportional dem Volumen des Körpers und dem Quadrate der Materialanstrengung,
3. verhältnissmässig 3 Mal grösser als der Werth Gl. 144, welcher sich für den prismatischen Stab Fig. 37 ergiebt.

Für den Stab Fig. 54 liefert Gl. 145 wegen

$$\iota = \frac{1}{3}$$

$$A = \frac{\alpha}{6} k_b^2 V.$$

§ 48. Arbeit der Drehung.

Der Körper ist in der Weise beansprucht, dass der Fall der einfachen Drehung vorliegt (V, § 32).

Vorausgesetzt sei, dass es sich um einen prismatischen Stab handle, dass die örtlichen Formänderungen an den Stellen, wo die äusseren Kräfte auf den Körper einwirken, vernachlässigt werden dürfen, dass sich ein auf gehinderte Ausbildung der Querschnittswölbung gerichteter Einfluss (vergl. § 34, unter Ziff. 3) nicht geltend mache und dass der Schubkoefficient β (§ 29) unveränderlich ist.

Um das im beliebigen Punkte P des Querschnittes (Fig. 93, Fig. 97 oder Fig. 102) gelegene Körperelement von der Grundfläche $dy\,dz = df$ und der Länge l so zu verdrehen, dass es die verhältnissmässige Schiebung γ erfährt, wobei die Schubspannung

$$\tau = \frac{\gamma}{\beta}$$

eintritt, ist eine Arbeit

$$dA = \frac{\tau\, df}{2} \gamma\, l = \frac{\beta}{2}\, l\, \tau^2\, df$$

aufzuwenden; demnach zur Verdrehung des ganzen Stabes

$$A = \frac{\beta}{2}\, l \int \tau^2\, df, \quad \ldots\ldots \quad 146)$$

wobei die Integration sich über den ganzen Querschnitt zu erstrecken hat.

Für den kreisförmigen Querschnitt, Fig. 93, folgt mit k_d als Drehungsanstrengung im Abstande r

$$\tau = k_d \frac{\varrho}{r},$$

$$A = \frac{\beta}{2}\, l \frac{k_d^2}{r^2} \int \varrho^2\, df = \frac{\beta}{2}\, l \frac{k_d^2}{r^2} \frac{\pi}{2} r^4 = \frac{\beta}{4}\, k_d^2\, \pi\, r^2\, l$$

und da $\pi r^2 l$ gleich dem Stabvolumen V,

$$A = \frac{\beta}{4}\, k_d^2\, V, \quad \ldots\ldots \quad 147)$$

worin k_d bei gegebenem Drehungsmoment M_d nach Beziehung 105 bestimmt ist durch die Gleichung

$$M_d = \frac{\pi}{16}\, k_d\, d^3.$$

Für den Hohlcylinder, Fig. 130 (§ 39), findet sich

$$A = \frac{\beta}{4}\, k_d^2\, \frac{d^2 + d_0^2}{d^2}\, V, \quad \ldots\ldots \quad 148)$$

worin

$$V = \frac{\pi}{4} (d^2 - d_0^2)\, l,$$

$$k_d = \frac{16}{\pi}\, M_d \frac{d}{d^4 - d_0^4}.$$

Vergleicht man die mechanischen Arbeiten A_z, A_b und A_d, welche ein Kreiscylinder vom Volumen V aus durchaus gleich-

artigem Material bei Beanspruchung auf Zug, bezw. Biegung (Fig. 37) und bezw. Drehung fordert, so erhält man zunächst

$$\text{nach Gl. 141 mit } \sigma = k_z \qquad A_z = \frac{1}{2}\,\alpha\, k_z^2\, V,$$

$$\text{„ „ 144 „ } \iota = \frac{1}{4} \qquad A_b = \frac{1}{24}\,\alpha\, k_b^2\, V,$$

$$\text{„ „ 147} \qquad A_d = \frac{1}{4}\,\beta\, k_d^2\, V.$$

Nach Gl. 99, bezw. 101 ist

$$\beta = 2\,\frac{m+1}{m}\,\alpha, \qquad k_s = \frac{m}{m+1}\,k_z.$$

Wird nun

$$m = \frac{10}{3}, \qquad k_s = k_d, \qquad k_b = k_z$$

gesetzt, womit

$$\beta = 2{,}6\,\alpha, \qquad k_d = \frac{10}{13}\,k_z,$$

so folgt

$$A_z : A_b : A_d = \frac{1}{2}\,\alpha\, k_z^2 : \frac{1}{24}\,\alpha\, k_z^2 : \frac{1}{4}\,2{,}6\,\alpha \left(\frac{10}{13}\,k_z\right)^2$$

$$= 1 : \frac{1}{12} : \frac{10}{13}$$

$$= 1 : 0{,}083 : 0{,}769.$$

Hieraus erhellt, dass bei der Biegung die geringste Formänderungsarbeit aufzuwenden ist, und dass infolge dessen der gebogene Cylinder auch nur eine verhältnissmässig geringe Formänderungsarbeit in sich aufnimmt.

Für den elliptischen Querschnitt, Fig. 97, mit den Halbachsen a und b ergiebt Gl. 111

$$\tau = \frac{2}{\pi}\,\frac{M_d}{a^3 b^3}\,\sqrt{a^4 y^2 + b^4 z^2}.$$

Folglich nach Gl. 146

$$A = 2\,\frac{\beta}{\pi^2}\,\frac{M_d^2}{a^6\,b^6}\,l\int(a^4\,y^2 + b^4\,z^2)\,df,$$

woraus wegen

$$\int y^2\,df = \frac{\pi}{4}\,a\,b^3, \qquad \int z^2\,df = \frac{\pi}{4}\,a^3\,b\,,$$

$$A = \frac{\beta}{2\,\pi}\,\frac{a^2+b^2}{a^3\,b^3}\,M_d^2\,l\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 149)$$

und unter Berücksichtigung der Gl. 114 mit k_d als Drehungsanstrengung

$$A = \frac{\beta}{2}\,\frac{\pi}{4}\,k_d^2\,\frac{b}{a}\,(a^2+b^2)\,l = \frac{\beta}{8}\,\frac{a^2+b^2}{a^2}\,k_d^2\,V, \quad 150)$$

sofern

$$V = \pi a b l$$

das Volumen des Stabes ist.

Die Gl. 149 ermöglicht die Feststellung des Winkels, um welchen sich jede der beiden Hauptachsen (das Hauptachsenkreuz) des einen Endquerschnittes des elliptischen Stabes gegenüber der ihr entsprechenden Achse (dem Hauptachsenkreuz) des anderen Endquerschnittes verdreht, in überaus leichter Weise. Dieser Winkel, dividirt durch die Entfernung l der beiden Querschnitte, giebt den verhältnissmässigen Drehungswinkel ϑ. (Vergl. § 33, Ziff. 1, d und e.) Seine Grösse sei deshalb mit ϑl bezeichnet.

Das drehende Kräftepaar (vergl. auch Fig. 90), dessen Moment von Null an stetig bis zu M_d wächst, verrichtet bei der Drehung des einen Querschnittes gegen den anderen, d. h. des Achsenkreuzes des einen Querschnittes gegenüber demjenigen des anderen, um ϑl eine mechanische Arbeit

$$\frac{1}{2}\cdot M_d\,.\,\vartheta\,l.$$

Dieselbe muss gleich sein der durch Gl. 149 bestimmten Arbeit, welche die Ueberwindung der inneren Kräfte fordert, d. h.

$$\frac{1}{2} M_d \vartheta l = \frac{\beta}{2\pi} \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} M_d^2 l,$$

$$\vartheta = \frac{1}{\pi} \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} M_d \beta, \quad \ldots \quad 151)$$

wie in § 36 unter No. 3 angegeben ist.

Für den rechteckigen Querschnitt, Fig. 102, mit der Breite b und der Höhe h findet sich unter Beachtung der Gl. 119 die Spannung im beliebigen Punkte P zu

$$\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2} = \sqrt{m^2 \left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right]^2 y^2 + n^2 \left[1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2\right]^2 z^2};$$

infolge dessen

$$\int \tau^2 df = m^2 \int y^2 df + n^2 \int z^2 df - 8 \left(\frac{m^2}{h^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \int y^2 z^2 df$$

$$+ \frac{16 m^2}{h^4} \int y^2 z^4 df + \frac{16 n^2}{b^4} \int y^4 z^2 df.$$

Wegen

$$\int y^2 df = \frac{1}{12} b^3 h, \qquad \int z^2 df = \frac{1}{12} b h^3,$$

$$\int y^2 z^2 df = \frac{1}{144} b^3 h^3,$$

$$\int y^2 z^4 df = \frac{1}{960} b^3 h^5, \qquad \int y^4 z^2 df = \frac{1}{960} b^5 h^3,$$

wird

$$\int \tau^2 df = \frac{1}{10} m^2 b^3 h + \frac{1}{10} n^2 b h^3 - \frac{1}{18} \left(\frac{m^2}{h^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) b^3 h^3.$$

Nach § 34 ist

$$m = \frac{2}{b} \tau'_a \qquad n = \frac{2b}{h^2} \tau'_a.$$

Hiermit folgt, sofern noch die Spannung τ'_a im Punkte A des Querschnittumfanges, Fig. 102, durch k_d ersetzt wird,

$$\int \tau^2 \, df = \frac{8}{45} k_d^2 \, b \, \frac{b^2 + h^2}{h};$$

infolge dessen nach Gl. 146

$$A = \frac{4}{45} \beta \, k_d^2 \, \frac{b}{h} (b^2 + h^2) \, l = \frac{4}{45} \beta \, \frac{b^2 + h^2}{h^2} \, k_d^2 \, V, \quad . \quad 152)$$

sofern

$$V = b \, h \, l$$

das Volumen des Stabes bezeichnet.

Wird nach Massgabe der Gleichung 123

$$k_d = \frac{9}{2} \frac{M_d}{b^3 \, h}$$

gesetzt, so findet sich

$$A = \frac{9}{5} \beta \, \frac{b^2 + h^2}{b^3 \, h^3} \, M_d^2 \, l. \quad . \quad . \quad . \quad 153)$$

Diese Beziehung gestattet in ganz gleicher Weise, wie oben für den elliptischen Stab erörtert, die Ermittelung des verhältnissmässigen Drehungswinkels ϑ für Prismen mit rechteckigem Querschnitt.

Die Arbeit, welche das drehende Kräftepaar bei der Verdrehung der um l von einander entfernten Querschnitte verrichtet, muss gleich A sein, d. h.

$$\frac{1}{2} M_d \, \vartheta \, l = \frac{9}{5} \beta \, \frac{b^2 + h^2}{b^3 \, h^3} \, M_d^2 \, l$$

$$\vartheta = 3{,}6 \, \frac{b^2 + h_2}{b^3 \, h^3} \, M_d \, \beta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 154)$$

Dieses Ergebniss unterscheidet sich von den in § 36 unter No. 6 aufgenommenen de Saint Venant'schen Werthen durch den Zahlenkoefficienten. Es schliesst sich den Ergebnissen der Ver-

suche, welche Bauschinger zu dem Zwecke anstellte, die de Saint Venant'sche Gleichung zu prüfen, noch besser an. Wie in § 35 unter Ziff. 2 berichtet, sollten nach den de Saint Venant'schen Koefficienten sich verhalten

$$\vartheta_a : \vartheta_b : \vartheta_c : \vartheta_d : \vartheta_e = 1 : 1{,}25 : 1{,}13 : 1{,}40 : 9{,}1.$$

Bauschinger's Messungen ergaben

$$\vartheta_a : \vartheta_b : \vartheta_c : \vartheta_d : \vartheta_e = 1 : 1{,}24 : 1{,}20 : 1{,}47 : 9{,}65.$$

Die Einführung des hier ermittelten Zahlenkoefficienten 3,6 der Gl. 154 für die rechteckigen Stäbe (*c*, *d* und *e*) führt zu

$$\vartheta_a : \vartheta_b : \vartheta_c : \vartheta_d : \vartheta_e = 1 : 1{,}24 : 1{,}14 : 1{,}44 : 9{,}76.$$

Dass der Zahlenwerth 3,6 der Gl. 154 an sich der richtigere sei, darf hieraus jedoch nicht geschlossen werden, da die Versuche mit Gusseisen angestellt wurden, dessen Dehnungskoefficient veränderlich ist (vergl. das S. 200 im ersten Absatz Gesagte).

§ 44. Arbeit der Schiebung.

Der Fall der Inanspruchnahme auf Schub allein wird dann als vorhanden betrachtet, wenn sich die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äusseren Kräfte für den in Betracht gezogenen Querschnitt ersetzen lassen durch eine Kraft S (Schubkraft), welche in die Ebene des Letzteren fällt und die Stabachse senkrecht schneidet. Wie im zweiten Abschnitt unter VI. erörtert, kann — streng genommen — diese Schubanstrengung niemals allein vorkommen; die Schubkraft S ist vielmehr immer von einem biegenden Moment begleitet.

Wird trotzdem nur diese in Betracht gezogen, welche nach Massgabe der Gl. 135 und der Fig. 126 für den beliebig zwischen $P'P'$ gelegenen Punkt P die Schubspannung

$$\tau = \frac{S}{2\,y\cos\varphi}\,\frac{M_\eta}{\Theta}$$

liefert, so ergiebt sich unter Voraussetzung der Unveränderlichkeit des Schubkoefficienten β Folgendes.

Die Herbeiführung der Schiebung γ des im Punkte P, Fig. 126, welcher um z von der senkrechten Hauptachse abstehe, zu denkenden Körperelementes von dem Querschnitt

$$df = d\eta\, dz$$

und der Länge dx, wobei eine Schubspannung

$$\tau = \frac{\gamma}{\beta}$$

wachgerufen wird, fordert eine mechanische Arbeit

$$dA = \frac{\tau\, df}{2}\, \gamma\, dx = \frac{\beta}{2}\, \tau^2\, df\, dx.$$

Demnach die gesammte Formänderungsarbeit der Schubkräfte

$$A = \frac{\beta}{2} \int dx \int \tau^2\, df = \frac{\beta}{2} \int dx \iint \tau^2\, d\eta\, dz. \quad . \quad . \quad 155)$$

Hieraus findet sich beispielsweise für den rechteckigen Querschnitt von der Breite b und der Höhe h, Fig. 123, da hier (vergl. § 39 unter a)

$$\varphi = \varphi' = 0, \qquad \tau = \frac{3}{2} \frac{S}{b\,h} \left[1 - \left(\frac{\eta}{\frac{h}{2}}\right)^2\right], \qquad df = b\, d\eta,$$

$$A = \frac{\beta}{2} \int dx \cdot \frac{9}{4} \frac{S^2}{b\,h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left[1 - \left(\frac{\eta}{\frac{h}{2}}\right)^2\right]^2 d\eta = \frac{3}{5}\, \beta \int \frac{S^2}{b\,h}\, dx. \quad 156)$$

Vierter Abschnitt.

Zusammengesetzte Beanspruchung gerader stabförmiger Körper.

VII. Beanspruchung durch Normalspannungen (Dehnungen).

Zug, Druck und Biegung.

Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äusseren Kräfte ergeben für den in Betracht gezogenen Querschnitt eine in die Stabachse fallende Kraft P und ein Kräftepaar vom Momente M_b, dessen Ebene den Querschnitt senkrecht schneidet.

Für einen beliebigen Punkt des Querschnittes liefert die Kraft P eine Dehnung und Normalspannung. Gleiche Wirkung hat das biegende Moment M_b. Die Gesammtdehnung, wie auch die Gesammtspannung ergiebt sich als die algebraische Summe aus den beiden Einzeldehnungen, bezw. Einzelspannungen.

Unter der Voraussetzung, dass die Ebene des Kräftepaares die eine der beiden Hauptachsen des Querschnittes in sich enthält, findet sich die durch M_b im Abstande η von der anderen Hauptachse hervorgerufene Normalspannung nach Gl. 42 zu

$$\frac{M_b}{\Theta}\eta.$$

Trifft diese Voraussetzung nicht zu, so ist die Normalspannung nach Massgabe des in § 21 unter 2 Erörterten festzustellen.

Die Normalspannung, welche von P herrührt, beträgt unter der Voraussetzung gleichmässiger Vertheilung über den Querschnitt in allen Punkten des Letzteren

$$\frac{P}{f}.$$

Folglich die Gesammtspannung σ im Abstande η von der bezeichneten Hauptachse

$$\sigma = \frac{M_b}{\Theta}\eta \pm \frac{P}{f}. \quad \ldots \quad 157)$$

Das obere Vorzeichen gilt, wenn P ziehend, das untere, wenn P drückend wirkt.

M_b, P, Θ und f sind als absolute Grössen zu betrachten, während η als positiv oder negativ einzuführen ist, je nachdem die betreffende Faserschicht auf der erhabenen oder der hohlen Seite der elastischen Linie liegt.

§ 45. Der einerseits befestigte prismatische Stab wird durch eine zur Stabachse parallele, jedoch excentrisch zu ihr gelegene Kraft P belastet.

Fig. 137 und 138.

Die durch P und die Stabachse bestimmte Ebene schneidet sämmtliche Körperquerschnitte in einer der beiden Hauptachsen.

I. Die Kraft P wirkt ziehend, Fig. 137.

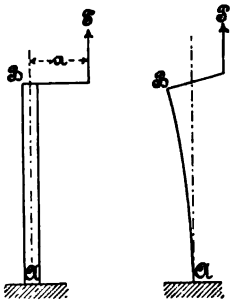


Fig. 137. Fig. 138.

Die hierbei eintretende Biegung des Stabes, Fig. 138, ist eine derartige, dass das biegende Moment, in soweit es von der Grösse der Durchbiegung beeinflusst wird, von B nach A hin abnimmt, also seinen grössten Werth $P\,a$ im Querschnitt bei B besitzt. Für diesen gilt daher nach Gl. 157, sofern der Werth von η für die am stärksten gespannte Faser gleich e ist,

$$\sigma_{max} = \frac{P\,a}{\Theta}\,e + \frac{P}{f} = \frac{P}{f}\left(1 + \frac{a\,e\,f}{\Theta}\right).$$

Hierbei ist der — übrigens nicht erhebliche — Einfluss, welchen die mit der Durchbiegung verknüpfte Neigung des Querschnitts nimmt, vernachlässigt.

Nach A hin wird sich σ_{max} vermindern in dem Masse, in welchem die Durchbiegung den Hebelarm der Kraft P verringert.

Für kreisförmigen Querschnitt vom Durchmesser d und mit $a = \frac{d}{2}$ (Kraft geht durch den Umfang des Querschnittes) folgt beispielsweise

$$f = \frac{\pi}{4}d^2, \qquad \Theta = \frac{\pi}{64}d^4, \qquad e = \frac{d}{2},$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{f}\left(1 + \frac{\frac{d^2}{4}\frac{\pi}{4}d^2}{\frac{\pi}{64}d^4}\right) = \frac{P}{f}(1+4) = 5\frac{P}{f},$$

d. h. die grösste Anstrengung ist 5 Mal so gross, als bei centrischem Angriff der Kraft P. Der Einfluss der Excentricität ist demnach ein ganz bedeutender.

Besteht der Stab aus einem Material, für welches die zulässige Anstrengung gegenüber Biegung, d. i. k_b, sich wesentlich unterscheidet von derjenigen gegenüber Zug, d. i. k_z, wie dies z. B. für Gusseisen zutrifft (vergl. § 22, Zusammenstellung auf S. 111, Spalte 4, Gl. 77 auf S. 112), so würde es unrichtig sein, ohne Weiteres nach Massgabe der Beziehungen

$$\frac{P}{f} + \frac{P\,a}{\Theta}\,e \leqq k_b \quad \text{oder} \quad \frac{P}{f} + \frac{P\,a}{\Theta}\,e \leqq k_z$$

zu rechnen. In solchem Falle ergeben sich mit

$$k_b = \beta_0\,k_z$$

die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \beta_0 \frac{P}{f} + \frac{P\,a}{\Theta}\, e \leqq k_b \quad \text{oder} \quad \frac{P}{f} + \frac{1}{\beta_0}\frac{P\,a}{\Theta}\, e \leqq k_z, \\ \beta_0 = \frac{k_b}{k_z} = \frac{\text{zulässige Biegungsanstrengung}}{\text{zulässige Zuganstrengung}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 158)$$

2. Die Kraft P wirkt drückend, Fig. 139.

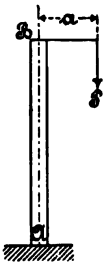


Fig. 139.

Hier nimmt bei eingetretener Durchbiegung das Moment M_b von B nach A hin zu, wie bereits in § 24 an Hand der Fig. 75 erörtert worden ist. In Bezug auf den durch x bestimmten Querschnitt fand sich dort

$$M_b = P\,(a + y' - y)$$

und hiermit, indem die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\alpha\,P}{\Theta}\,(a + y' - y)$$

zum Ausgangspunkt genommen wurde,

$$\frac{y'}{a + y'} = 1 - \cos\left(l\sqrt{\frac{\alpha\,P}{\Theta}}\right),$$

woraus

$$a + y' = \frac{a}{\cos\left(l\sqrt{\frac{\alpha\,P}{\Theta}}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 159)$$

und damit die Durchbiegung des freien Endes

$$y' = a\left[\frac{1}{\cos\left(l\sqrt{\frac{\alpha\,P}{\Theta}}\right)} - 1\right] . \quad . \quad . \quad . \quad 160)$$

Für den Querschnitt bei A erlangt M_b den grössten Werth, nämlich

$$\max\,(M_b) = P\,(a + y') = \frac{P\,a}{\cos\left(l\sqrt{\frac{P\,\alpha}{\Theta}}\right)};$$

folglich beträgt hier die Gesammtspannung der im Abstande $\eta = + e_1$ gelegenen Fasern nach Gl. 157

$$\max(\sigma_1) = \frac{P a}{\cos\left(l\sqrt{\frac{P\alpha}{\Theta}}\right)} \frac{e_1}{\Theta} - \frac{P}{f} \leq k_b \quad . \quad . \quad 161)$$

und die Gesammtpressung der im Abstande $\eta = - e_2$ gelegenen Fasern

$$\max(\sigma_2) = \frac{P a}{\cos\left(l\sqrt{\frac{P\alpha}{\Theta}}\right)} \frac{e_2}{\Theta} + \frac{P}{f} \leq k, \quad . \quad 162)$$

sofern k_b und k die zulässigen Anstrengungen gegenüber Biegung bezw. Druck bezeichnen.

Besteht der stabförmige Körper aus einem Material, für welches k_b erheblich von k abweicht, so muss streng genommen in sinngemässer Weise so verfahren werden, wie am Schlusse von Ziff. 1 angegeben worden ist. Da jedoch hier unter allen Umständen eine grössere Sicherheit darin liegt, wenn die Gl. 161 ohne Weiteres benützt wird, während dort die Ausserachtlassung von β_0 in der ersten der Beziehungen 158 zu einer wesentlichen Unterschätzung der Materialanstrengung führen könnte, so dürfte an dieser Stelle der gegebene Hinweis genügen.

a) Der Stab ist schlank und der Hebelarm a klein.

Diese Sachlage entspricht dem im ersten Abschnitt unter IV behandelten Falle der Knickung. Dort wurde zwar centrische Belastung des Stabes durch die Kraft P zunächst vorausgesetzt; wir erkannten aber, dass es sehr schwer hält, diese Voraussetzung zu erfüllen, infolge dessen ein, wenn auch sehr kleiner Hebelarm als thatsächlich vorhanden angenommen werden musste. Diese Annahme wurde ausserdem noch dadurch zu einer Nothwendigkeit, dass in Wirklichkeit die Achse bei längeren Stäben keine gerade Linie und dass thatsächlich das Material nicht vollkommen gleichartig ist. Wir gelangten sodann in § 24 zu dem Ergebniss, dass wenn die Belastung P beträgt

$$P_0 = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\alpha} \frac{\Theta}{l^2},$$

die Durchbiegung y' nach Gl. 160 selbst für einen sehr kleinen Werth des Hebelarmes a die Grösse ∞ annimmt. Infolge dessen war P_0 als diejenige Belastung zu bezeichnen, welche die Knickung, d. h. Bruch oder unzulässige Biegung des Stabes herbeiführen wird, sofern nur $a > 0$. Letzteres muss aber aus den bezeichneten Gründen immer angenommen werden.

Demgemäss wurde in § 25 als zulässige Grösse der den Stab belastenden Kraft P nur der $\mathfrak{S}$te Theil von P_0 in Rechnung gestellt, also gewählt

$$P = \frac{\pi^2}{4\mathfrak{S}} \frac{1}{a} \frac{\Theta}{l^2}$$

unter Beachtung, dass überdies die Forderung der einfachen Druckbeanspruchung

$$P \leq kf$$

befriedigt sein muss.

Wird in Gl. 160 für P der in der vorletzten Gleichung enthaltene Werth eingeführt, so ergiebt sich

$$y' = a\left[\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{\mathfrak{S}}}\right)} - 1\right],$$

woraus beispielsweise

für $\mathfrak{S} =$	4	9	16	25
die Ausbiegungen $y' =$	$0{,}414a$	$0{,}155a$	$0{,}082a$	$0{,}052a$

folgen.

Die Bedingung

$$P \leq \frac{P_0}{\mathfrak{S}}$$

kommt demnach darauf hinaus, dass man die Abweichung y' von der Geraden, d. h. die Ausbiegung, innerhalb einer gewissen Grenze hält.

Ganz entsprechend wird auch hier vorzugehen sein. Der einzige Unterschied besteht darin, dass infolge des excentrischen Angreifens der Kraft P von vornherein ein Hebelarm gegeben ist. Derselbe, mit a_1 bezeichnet, ist schätzungsweise um einen Betrag a_2

zu vergrössern, welcher den oben bezeichneten Umständen (Nichtgeradlinigkeit der Stabachse, Ungleichartigkeit des Materials, einschliesslich Verschiedenartigkeit seines Zustandes) Rechnung trägt. Hinsichtlich a_1 wird wesentlich die Genauigkeit in Betracht kommen, mit welcher sich die Lage der auf den Stab wirkenden Kräfte feststellen und wenigstens dahin sichern lässt, dass Ueberschreitung des in Rechnung genommenen Werthes von a_1 in Wirklichkeit nicht stattfindet. Indem hierbei die Konstruktion, Material, Ausführung und Aufstellung Einfluss nehmen werden, greift die Grösse a_1 in das Gebiet von a_2 über.

Liegen die Grössen a_1 und a_2, nach Massgabe des Vorstehenden mit Rücksicht auf die besonderen Verhältnisse der jeweiligen Aufgabe ermittelt, vor, so kann unter Beachtung, dass die zulässige Biegung y' für nicht federnde Konstruktionstheile sehr klein sein muss, zunächst gesetzt werden

$$M_b = P(a_1 + a_2),$$

womit sich ergiebt

$$\left.\begin{aligned} \frac{P(a_1+a_2)}{\Theta} e_1 - \frac{P}{f} &\leqq k_b, \quad . \quad . \quad . \\ \frac{P(a_1+a_2)}{\Theta} e_2 + \frac{P}{f} &\leqq k \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}\right\} \quad 163)$$

(Vergl. die Bemerkungen zu Gl. 161 und 162).

Befriedigt der Stab diese Bedingungen, so ist die Durchbiegung

$$y' = (a_1 + a_2)\left[\frac{1}{\cos\left(l\sqrt{\frac{P\alpha}{\Theta}}\right)} - 1\right] \quad . \quad . \quad . \quad 164)$$

zu berechnen und Entschliessung hinsichtlich ihrer Zulässigkeit zu fassen. Erforderlichenfalls sind die Abmessungen des Stabes zu ändern.

Die Gleichungen 163 und 164 setzen voraus, dass a_2 in die Richtung von a_1 fällt, was nicht nothwendigerweise der Fall sein muss. Ist das Trägheitsmoment Θ (bezogen auf die zum Abstande a_1 senkrechte Hauptachse) das kleinere der beiden Hauptträgheits-

momente, so wird diese Annahme allerdings im Sinne des Zweckes der ganzen Rechnung liegen. Wenn dagegen Θ das grössere Trägheitsmoment ist, so verlangt dieser Gesichtspunkt, dass a_2 senkrecht zu a_1, sofern nicht besondere Gründe für eine andere Richtung sprechen, angenommen und nach Massgabe des in § 21 unter 2 Erörterten verfahren wird.

Um die unmittelbare Wahl von a_2 zu umgehen, kann z. B. für Baukonstruktionen in derselben oder in ähnlicher Weise vorgegangen werden, wie dies in § 26 für den Fall einfacher Knickung besprochen worden ist[1]). Näheres Eingehen hierauf würde den Rahmen dieser Arbeit weit überschreiten, ganz abgesehen davon, dass die besonderen Einflüsse, welche bei den einzelnen Aufgaben zu berücksichtigen sind, die Berechnung des betreffenden Konstruktionstheiles dahin verweisen, wo derselbe seiner Wesenheit nach, sowie in seinem Zusammenhange mit den an ihn anschliessenden Theilen zu behandeln ist.

b) Der Stab ist schlank und der Hebelarm a im Verhältniss zu den Abmessungen des Querschnittes gross.

In diesem Falle wird zunächst die erste der Beziehungen 163 mit $a_1 + a_2 = a$, d. h.,

$$\frac{Pa}{\Theta} e_1 - \frac{P}{f} \leqq k_b$$

massgebend; der Einfluss des Gliedes

$$\frac{P}{f}$$

tritt hierbei zurück. Sodann ist für den Fall, dass der Stab dieser Beziehung genügt, die nach Gl. 164 eintretende Durchbiegung zu ermitteln und über deren Zulässigkeit Entscheidung zu treffen.

---

[1]) S. z. B. v. Tetmajer, Die angewandte Elasticitäts- und Festigkeitslehre, Zürich 1889, S. 162 u. f. v. Tetmajer steht hinsichtlich der Behandlung der Knickungsaufgabe auf einem anderen Standpunkt als Verfasser, weshalb auf dessen Arbeit S. 90 u. f., S. 162 u. f. besonders aufmerksam gemacht sei. (Vergl. auch des Verfassers Besprechung des v. Tetmajer'schen Buches in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1889, S. 474 u. f.)

c) Die Querschnittsabmessungen des Körpers sind im Vergleich zur Länge desselben und zur Grösse des Hebelarmes so bedeutend, dass eine Biegung von Erheblichkeit nicht eintritt.

Dann sind einfach die Gl. 163 zu beachten und in ihnen

$$a_1 + a_2 = a$$

zu setzen; Gl. 164 kommt nicht mehr in Betracht.

Hierher gehören auch Beispiele, wie das folgende. Der senkrechte Mauerpfeiler vom Gewichte G und der Länge l, Fig. 140, empfängt durch ein Lager den abwärts gerichteten Druck P. Das im Schwerpunkte angreifende Gewicht ergiebt für die Grundfläche $l\,s$ des Bodens, auf welchem der Pfeiler steht, unter Voraussetzung gleichmässiger Druckvertheilung die Pressung

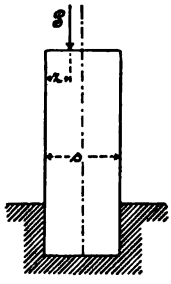


Fig. 140.

$$\frac{G}{l\,s}.$$

Der Druck P, in die Mittelebene des Pfeilers, d. h. um $\frac{s}{2} - z$ verlegt, liefert eine Kraft P und ein Kräftepaar vom Momente

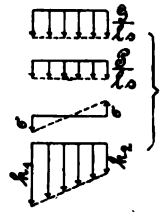


Fig. 141.

$$P\left(\frac{s}{2} - z\right).$$

Die Erstere führt zu einer gleichmässig über die Bodenfläche vertheilten Pressung

$$\frac{P}{l\,s},$$

das Letztere dagegen ergiebt für die linke Mauerkante eine Pressung σ, welche sich bestimmt aus

$$P\left(\frac{s}{2}-z\right)=\frac{1}{6}\sigma l s^2$$

zu

$$\sigma=\frac{6P\left(\frac{s}{2}-z\right)}{l s^2},$$

mit der Genauigkeit, mit welcher die Hauptgleichung der Biegungselasticität auf den vorliegenden Fall angewendet werden darf.

Damit beträgt die gesammte Pressung an der linken Mauerkante

$$k_1=\frac{G+P}{l s}+\frac{6P\left(\frac{s}{2}-z\right)}{l s^2},$$

an der rechten dagegen

$$k_2=\frac{G+P}{l s}-\frac{6P\left(\frac{s}{2}-z\right)}{l s^2}.$$

Die Erstere soll die für den Boden höchstens noch als zulässig erachtete Grösse nicht überschreiten.

Fig. 141 giebt ein Bild der Pressungsvertheilung über die Bodenfläche.

Diese Rechnungsweise gilt für das gewählte Beispiel naturgemäss nur so lange, als $k_2 \geqq 0$ ausfällt. Würde sich k_2 negativ ergeben, so wären an der rechten Kante des Mauerpfeilers von dem Boden Zugspannungen auf diesen auszuüben, was in Wirklichkeit nicht geschehen kann. In solchem Falle würde in allen denjenigen Flächenelementen, für welche sich Zugspannungen ergeben, die Berührung zwischen Pfeiler und Boden aufhören müssen und damit dieser Theil des Querschnittes für die Druckvertheilung nicht mehr in Betracht kommen können. Die Rechnung ist dann derart durchzuführen, dass nur derjenige Theil des Querschnittes berücksichtigt wird, welcher thatsächlich in Wirksamkeit tritt.

Wird unter Bezugnahme auf Fig. 142 mit x die Breite dieses Querschnittstheils bezeichnet, so folgt

$$k_1 = \frac{G+P}{l\,x} + \sigma,$$

und da

$$P\left(\frac{x}{2} - z\right) - G\left(\frac{s}{2} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{6}\sigma\, l\, x^2$$

$$k_1 = \frac{G+P}{l\,x} + \frac{6\,P\left(\frac{x}{2} - z\right) - 6\,G\left(\frac{s}{2} - \frac{x}{2}\right)}{l\,x^2}.$$

Die Unbekannte x ergiebt sich aus der Erwägung, dass die Pressung im Abstande x von der linken Pfeilerkante gleich Null sein muss, d. h.

$$0 = \frac{G+P}{l\,x} - \frac{6\,P\left(\frac{x}{2} - z\right) - 6\,G\left(\frac{s}{2} - \frac{x}{2}\right)}{l\,x^2},$$

woraus

$$x = 3\,\frac{G\frac{s}{2} + P\,z}{G+P}.$$

Denken wir uns P und G durch ihre Resultante $P+G$ ersetzt, so müsste diese im Abstande

$$y = \frac{G\frac{s}{2} + P\,z}{G+P}$$

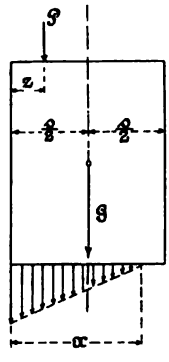


Fig. 142.

von der linken Pfeilerkante angreifen. Demnach

$$x = 3\,y,$$

d. h. die Breite x der für die Druckvertheilung in Betracht kommenden Fläche ist gleich dem 3fachen Werthe des Abstandes y.

Die Einführung von y in den Ausdruck für k_1 liefert

$$k_1 = \frac{G+P}{l\,x} + \frac{6\,(G+P)\left(\frac{x}{2} - y\right)}{l\,x^2} = \frac{G+P}{3\,l\,y} + \frac{(G+P)\,0{,}5\,y}{9\,l\,y^2}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{G+P}{l\,y} = 2\,\frac{G+P}{l\,x},$$

d. i. doppelt soviel als bei gleichmässiger Vertheilung des Druckes über den Querschnitt $l\,x$.

Galt der oben für k_1 gefundene Ausdruck nur für das durch

$$k_2 = -\frac{G+P}{l\,s} - \frac{6\,P\left(\frac{s}{2} - z\right)}{l\,s^2} \geqq 0$$

umschlossene Gebiet, so ist das Geltungsbereich der zuletzt für k_1 ermittelten Gleichung durch

$$k_2 = -\frac{G+P}{l\,s} - \frac{6\,P\left(\frac{s}{2} - z\right)}{l\,s^2} \leqq 0$$

oder durch

$$x = 3\,y = 3\,\frac{G\,\frac{s}{2} + P\,z}{G+P} \leqq s$$

begrenzt. Für den Grenzfall $k_2 = 0$ oder $x = s$ müssen beide Ausdrücke zu dem gleichen Werthe führen. Die Beurtheilung kann am raschesten in der Weise geschehen, dass man y ermittelt und zusieht, ob $y \gtreqless \frac{s}{3}$ ist. Im ersten und im zweiten Falle gilt der zuerst für k_1 bestimmte Werth, im zweiten und dritten Falle dagegen der zuletzt ermittelte.

§ 46. Einfluss des Widerstandes beim Gleiten der Oberfläche des beiderseits gelagerten und in der Mitte durch P belasteten Stabes gegenüber den Stützen infolge der Durchbiegung.

Der zunächst als gewichtlos gedachte Stab, im ursprünglichen, unbelasteten Zustande, berührt die beiden Auflager mit bestimmten Theilen seiner Mantelfläche. Wenn er sich zu biegen beginnt, so muss derjenige Punkt der Stabachse, welcher ursprünglich über dem einen, etwa dem linken, Auflager sich befand, nach der Mitte rücken — vergl. Fig. 143 —, da die Achse, d. h. die elastische

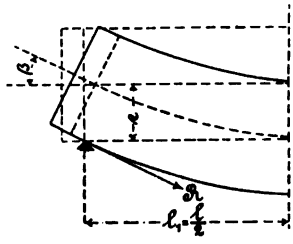


Fig. 143.

Linie, ihre Länge beibehält. Diese Verrückung $\triangle$ nach der Stabmitte hin lässt sich auffassen als Differenz zwischen der halben Stablänge $l_1 = 0{,}5\, l$ und der halben Sehne des Bogens der elastischen Linie, dessen Länge unveränderlich, nämlich gleich l_1, und dessen Pfeilhöhe gleich der Durchbiegung y' in der Mitte ist.

Wird, was für unseren Zweck zulässig, die elastische Linie als flacher Parabelbogen aufgefasst, so erhält man, da für diesen, sofern dessen halbe Sehne a, dessen halbe Länge s und dessen Pfeilhöhe δ beträgt, bekanntlich gesetzt werden darf

$$s = a\left(1 + \frac{2}{3}\frac{\delta^2}{a^2}\right),$$

entsprechend einem Unterschied von

$$\frac{2}{3}\left(\frac{\delta}{a}\right)^2 a = \sim \frac{2}{3}\left(\frac{\delta}{s}\right)^2 s$$

zwischen s und a,

$$\triangle = \frac{2}{3}\left(\frac{y'}{l_1}\right)^2 l_1 = \frac{4}{3}\left(\frac{y'}{l}\right)^2 l.$$

Gleichzeitig mit dieser Verrückung des Endpunktes der elastischen Linie nach einwärts neigt sich derjenige Stabquerschnitt, welcher über dem Auflager stand, unter dem kleinen Winkel β. Hiermit ist eine Auswärtsbewegung der Linie (oder des Punktes), in welcher, bezw. in welchem der Stab vor der Biegung das Auflager berührte, um $e\beta$ verknüpft. Da nach Gl. 61

$$\beta = \frac{\alpha}{16}\frac{P l^2}{\Theta},$$

so beträgt diese Auswärtsbewegung

$$\frac{\alpha}{16}\frac{P l^2}{\Theta} e.$$

Demnach rücken diejenigen Theile der Mantelfläche des Stabes, mit welchen derselbe im unbelasteten Zustande, d. h. bei gerader Achse, die Auflager berührte, nach auswärts um die Strecke

$$x = e\beta - \triangle = \frac{\alpha}{16}\frac{P l^2}{\Theta} e - \frac{4}{3}\left(\frac{y'}{l}\right)^2 l.$$

Gl. 62 ergiebt

$$y' = \frac{\alpha}{48}\frac{P l^3}{\Theta},$$

folglich

$$x = \frac{\alpha}{16}\frac{P l^2}{\Theta}\left(e - \frac{\alpha P l^3}{108\,\Theta}\right).$$

So lange x positiv ist, d. h. wenn

$$e \geqq \frac{\alpha P l^3}{108\,\Theta},$$

$$P \leqq 108\frac{\Theta e}{\alpha l^3},$$

oder nach Einführung von

$$\frac{P\,l}{4} = \sigma \frac{\Theta}{e},$$

worin σ die grösste Biegungsanstrengung in der Mitte des Stabes bezeichnet,

$$\frac{e}{l} > \sqrt{\frac{1}{27}\alpha\,\sigma}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 165)$$

so lange wird die in Frage stehende Bewegung nach auswärts erfolgen und damit während des Vorsichgehens der Durchbiegung eine auf den Stab wirkende, einwärts gerichtete Kraft R (vergl. Fig. 143) wachgerufen werden. Setzen wir, um zu erkennen, ob diese Voraussetzung für gewöhnlich zutrifft, für Stahl

$$\alpha = \frac{1}{2150000}, \qquad \sigma = 1600,$$

so findet sich

$$\frac{e}{l} > \sqrt{\frac{1600}{27 \,.\, 2150000}} \qquad e > \frac{1}{190}\,l,$$

was ausnahmslos der Fall sein wird. Es wirkt also — unter der Voraussetzung kleiner Durchbiegungen — R thatsächlich in der bezeichneten Richtung. Diese Kraft ist für unbewegliche Auflager, welche sich nicht in den Stab eindrücken, gleich der Reibung, d. h.

$$R = \frac{P}{2}\mu,$$

sofern μ den Koefficienten der gleitenden Reibung zwischen Staboberfläche und festem Auflager bezeichnet.

Drücken sich die Auflager in den Stab ein, so tritt R nicht mehr als einfache Reibung, sondern als weit grösserer Widerstand auf.

Werden die Stützen von Rollen gebildet, welche sich um feste Zapfen drehen können (Rollenauflager), so wird R kleiner als $0{,}5\,P\,\mu$ ausfallen.

Die Kraft R wirkt nun, abgesehen von ihrem Einflusse auf die Länge der Stabachse, mit dem Momente

$$R\,e = 0{,}5\,P\,\mu\,e \quad \ldots\ldots\ldots \quad 166)$$

auf den Stab, sofern der Einfluss der Durchbiegung auf das Moment vernachlässigt wird. Für den mittleren Stabquerschnitt ergiebt sich alsdann nicht das Moment

$$\frac{P\,l}{4},$$

sondern

$$\frac{P\,l}{4} - R\,e = \frac{P\,l}{4} - \frac{P\,\mu\,e}{2} = \frac{P\,l}{4}\left(1 - 2\,\mu\,\frac{e}{l}\right). \quad . \quad 167)$$

Beispielsweise beträgt für $e = 50$ mm und $l = 1000$ mm die Verminderung des Momentes

bei

$\mu = 0{,}1$	$\mu = 0{,}5$
1 %	5 %,

für

$e = 200$ mm und $l = 1000$ mm,

bei

$\mu = 0{,}1$	$\mu = 0{,}5$
4 %	20 %.

Deutlich zeigt sich der Einfluss der verhältnissmässigen Höhe des Stabes und des Koefficienten μ.

Werden feste Auflager verwendet, welche die Form einer Schneide haben und sich vielleicht gar in den Stab eindrücken, wodurch μ einen verhältnissmässig hohen Werth erlangen muss, so kann die Kraft R selbst bei nicht hohen Körpern in erheblicher Grösse auftreten[1]).

Handelt es sich z. B. um die Ermittlung der Anstrengung, die eine Schwelle, Fig. 144, beim Eindrücken in die Bettung erfährt,

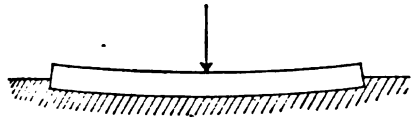


Fig. 144.

[1]) Aus diesem Grunde sollen der Biegungsprobe zu unterwerfende Stäbe, deren Querschnittsabmessungen nicht klein sind im Vergleich zur Stützweite, Rollenauflager erhalten, was meist zu geschehen pflegt. (Vergl. hierüber Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1888, S. 244 u. f., Fussbemerkung daselbst.)

so wird der Einfluss der Reibung, welche infolge der Durchbiegung zwischen Bettung und Unterfläche der Schwelle auftritt, nicht ohne Weiteres ausser Acht gelassen werden dürfen. Auch bei gebogenen Federn, welche an beiden Enden aufliegen und in der Mitte belastet sind, können infolge des mit der Pfeilhöhe der gebogenen Mittellinie wachsenden Hebelarmes der Reibungskräfte diese von erheblicher Bedeutung werden u. s. w.

Immerhin aber werden es nur Ausnahmefälle sein, in denen auf die im Vorstehenden erörterte Wirkung der Reibung zwischen gebogenem Stab und Auflager Rücksicht zu nehmen ist.

Schliesslich sei noch darauf hingewiesen, dass bei — auch theilweiser — Entlastung des Stabes sich die Durchbiegung vermindert; damit kehrt die Kraft R ihre Richtung und das Moment Re seinen Sinn um, die Biegungsbeanspruchung nicht mehr vermindernd, sondern vermehrend.

VIII. Beanspruchung durch Schubspannungen (Schiebungen).

§ 47. Schub und Drehung.

Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äusseren Kräfte ergeben für den in Betracht gezogenen Querschnitt eine in denselben fallende Kraft S und ein Kräftepaar vom Momente M_d, dessen Ebene die Stabachse senkrecht schneidet.

In einem beliebigen Element des Querschnitts erzeugt die Schubkraft S eine Schubspannung τ_s und das auf Drehung wirkende Moment M_d eine Schubspannung τ_d; die Resultante aus τ_s und τ_d liefert die Inanspruchnahme in dem betreffenden Querschnittselemente.

Bei Beurtheilung derselben, sowie bei Wahl der zulässigen Anstrengung ist es von Bedeutung zu beachten, dass sie nicht blos in dem Querschnitt, sondern auch senkrecht dazu auftritt (§ 30, s. auch Fig. 94 u. 95, bezw. die Erörterung, welche in § 45, Ziff. 1 zur Einführung von β_0 und in § 48, Ziff. 2 zur Einführung von α_0 Veranlassung giebt).

1. Kreisquerschnitt.

Nach § 39, b ist die von S herrührende Schubspannung am grössten für die Umfangspunkte des zu S senkrechten Durchmessers, und zwar beträgt sie daselbst

$$\tau_s = \frac{4}{3}\frac{S}{f} = \frac{16}{3\pi}\frac{S}{d^2},$$

sofern

$$f = \frac{\pi}{4}d^2$$

die Grösse des Querschnittes und d dessen Durchmesser bezeichnet.

Nach § 32 ist für alle Umfangspunkte die durch M_d wachgerufene Schubspannung

$$\tau_d = \frac{16}{\pi}\frac{M_d}{d^3}$$

die grösste. Demnach beträgt die resultirende Anstrengung, welche in jenen beiden Umfangspunkten den grössten Werth erreicht,

$$\tau_s + \tau_d = \frac{16}{3\pi}\frac{S}{d^2} + \frac{16}{\pi}\frac{M_d}{d^3} = \frac{16}{\pi d^2}\left(\frac{S}{3} + \frac{M_d}{d}\right).$$

2. Kreisringquerschnitt von geringer Wandstärke, Fig. 130.

Nach § 39, c ist

$$\tau_s = 2\frac{S}{f},$$

nach § 32

$$\tau_d = \frac{16}{\pi}M_d\frac{d}{d^4 - d_0^4} = \sim 2\frac{M_d}{d_m f},$$

sofern

$$d_m = \frac{d + d_0}{2} \qquad f = \frac{\pi}{4}(d^2 - d_0^2).$$

Folglich

$$\tau_s + \tau_d = \frac{2}{f}\left(S + \frac{M_d}{d_m}\right).$$

3. Rechteckiger Querschnitt, Fig. 123.

Unter der Voraussetzung, dass S senkrecht zur Breite b wirkt, werden beide Schubspannungen am grössten in den Mitten der langen Seiten.

Nach § 38 beträgt hier

$$\tau_s = \frac{3}{2}\frac{S}{b\,h},$$

und nach § 34

$$\tau_d = \frac{9}{2}\frac{M_d}{b^2 h}.$$

Somit

$$\tau_s + \tau_d = \frac{3}{2}\frac{1}{b\,h}\left(S + 3\frac{M_d}{b}\right).$$

IX. Beanspruchung durch Normalspannungen (Dehnungen) und Schubspannungen (Schiebungen).

§ 48. Grösste Anstrengung bei gleichzeitig vorhandener Dehnung (Normalspannung) und Schiebung (Schubspannung).

I. Begriff der zulässigen Anstrengung des Materials.

Bei den bisherigen Betrachtungen haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass hinsichtlich des Begriffs der zulässigen Anstrengung ein Zweifel nicht bestehe. So lange nur Normalspannungen in Richtung der Stabachse (Zug, Druck, Biegung) oder lediglich Schubspannungen (Drehung, Schub) vorhanden sind, pflegt ein solcher auch thatsächlich nicht in die Erscheinung zu treten; anders gestaltet sich jedoch die Sachlage, sobald Normalspannungen und Schubspannungen gleichzeitig thätig, oder senkrecht zu einander wirkende Normalspannungen vorhanden sind. Dann kann in der That eine Unsicherheit entstehen. Aus diesem Grunde ist hier, wo uns erstmals gleichzeitig Normalspannungen und Schubspannungen entgegen treten, der Begriff der zulässigen Anstrengung zu erörtern.

Bei der Herleitung der Abmessungen von Maschinen- oder Bautheilen, sowie von ganzen Konstruktionen aus den beanspruchenden Kräften, sind drei Gesichtspunkte festzuhalten, sofern abgesehen wird von den Fällen, in denen Rücksichten auf Herstellung, Fortschaffung, Abnützung u. s. w. massgebend erscheinen.

Der erste Gesichtspunkt, welcher das bestimmt, was der Regel nach als zulässige Anstrengung gilt, liefert die Forderung, dass

a) (nach der Ansicht der Einen) die Spannung,
oder
b) (nach der Ansicht der Anderen) die verhältnissmässige Dehnung

in keinem Punkte des Körpers die höchstens für zulässig erachtete Grösse überschreite.

Bei einfacher Zug-, Druck- und Biegungselasticität, sowie bei Verbindung derselben besteht — streng genommen allerdings nur im Falle der Unveränderlichkeit des Dehnungskoefficienten — Proportionalität zwischen Dehnungen und den ihnen entsprechenden Normalspannungen. In diesen Fällen kommt deshalb die Forderung a) auf dasselbe hinaus, wie diejenige unter b); denn multiplicirt man die höchstens für zulässig erachtete Normalspannung mit dem Dehnungskoefficienten, so tritt an ihre Stelle die höchstens noch für zulässig gehaltene Dehnung.

Da bei einfacher Drehungs- und Schubelasticität, sowie bei Verbindung beider ebenfalls Proportionalität zwischen Schubspannungen und den zugehörigen Dehnungen vorhanden ist (§ 31), so dürfen auch in diesen Fällen — Unveränderlichkeit des Dehnungskoefficienten vorausgesetzt — die Bedingungen unter a) und b) als zusammenfallend betrachtet werden.

Wirken dagegen senkrecht zu einander stehende Normalspannungen gleichzeitig, so hört die sonst vorhandene Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen auf, wie in § 7 und § 14 erörtert worden ist, und die Auffassung nach a) fordert etwas anderes als diejenige nach b). Die Erstere räumt den senkrecht zum gezogenen oder gedrückten Stab wirkenden Kräften keinen Einfluss auf die zulässige Anstrengung ein, sie lässt die in § 9, Ziff. 1 erörterten Versuchsergebnisse unbeachtet, sie belastet einen in Richtung der Achse gezogenen und senkrecht zu seiner Achse gedrückten Stab ebenso stark, als wenn diese Druckkräfte nicht vorhanden wären,

sie wählt die zulässige Anstrengung der Bleischeibe Fig. 34 ebenso gross wie diejenige der Fig. 35, obgleich dieselbe im letzteren Falle erfahrungsgemäss weit grösser genommen werden darf; für sie ist die zulässige Anstrengung im Falle der Fig. 33 (Fig. 31) dieselbe, gleichgiltig ob $z = 60$ mm oder $z = 5$ mm, und zwar auch dann, wenn etwa an Stelle des Steinwürfels ein solcher aus Schmiedeisen träte; sie kann folgerichtig den in § 20, Ziff. 2 besprochenen Einfluss der Fasern auf einander nicht anerkennen u. s. f.

Treten gleichzeitig Normal- und Schubspannungen auf, so ergeben sich für den betreffenden Punkt des Körpers eine grösste Spannung und eine grösste Dehnung; beide stehen jedoch nicht in dem Verhältnisse, wie einfache Normalspannung und Dehnung nach Massgabe der Gl. 4. Die Bedingung unter a) verlangt deshalb in solchem Falle auch nicht das Gleiche, wie die Forderung unter b).

Die Auffassung unter a) ist die ältere und erfreut sich auch heute noch einer grossen Verbreitung. Mariotte dürfte wohl der Erste gewesen sein, welcher darauf hingewiesen hat, dass die Dehnung eine gewisse Grenze nicht überschreiten soll; dagegen scheint es, dass erst Poncelet (vor einem halben Jahrhundert) die Forderung unter b) mit Entschiedenheit vertreten und durchgeführt hat.

Dass die Bedingung unter a) in verschiedenen Fällen nicht zutreffend ist, erhellt aus dem Erörterten. Unter diesen Umständen erachtet Verfasser die Feststellung des Begriffs der zulässigen Anstrengung nach Massgabe der Forderung unter b) für die zweckmässigere. Welcher Grad der Zuverlässigkeit ihr innewohnt, welche Mängel ihr anhaften, wird durch ausgedehnte — übrigens erheblichen Schwierigkeiten begegnende — Versuche noch zu entscheiden sein.

Folgerichtig wäre hiernach, mit zulässigen Dehnungen statt mit zulässigen Spannungen zu rechnen. Da sich jedoch der Begriff der zulässigen Anstrengung als einer auf die Flächeneinheit bezogenen Kraft eingebürgert hat, es auch keine Schwierigkeit bietet, zu jeder zulässigen Spannung eine entsprechende Dehnung zu bestimmen[1]), so erscheint die Beibehaltung der auf die Flächeneinheit bezogenen

[1]) Nach S. 270 ist die Normalspannung mit α, die Schubspannung mit $\frac{m+1}{m}\alpha$ zu multipliciren.

$$\overline{CK} = \overline{DG} = \varepsilon_q \,.\, \overline{BC},$$

wenn

$$\varepsilon_q = \frac{\overline{CK}}{\overline{BC}}$$

(vergl. § 7).

Zu dieser mit der Normalspannung verknüpften Formänderung tritt nun die der Schubspannung entsprechende. Es verschiebe sich der Querschnitt EF (ursprünglich BC) um

$$\overline{EH} = \overline{FJ} = \gamma \,.\, \overline{AB}$$

gegen den Querschnitt AGD, sofern γ die Schiebung (vergl. § 28) bedeutet.

Hierbei dehnt sich die ursprünglich $\overline{AC}$ lange Strecke bis zur Grösse $\overline{AJ}$. Fällt man von J ein Loth JL auf die über C hinaus verlängerte Linie AC, so dass also $\measuredangle\, JLA = 90^0$ ist, so ergiebt sich die Verlängerung, welche $\overline{AC}$ beim Uebergang in $\overline{AJ}$ erfahren hat, mit Rücksicht darauf, dass die Formänderungen überhaupt klein sind, angenähert zu $\overline{CL}$. Hiermit wird dann die verhältnissmässige Dehnung ε_1 der Strecke $\overline{AC}$

$$\varepsilon_1 = \frac{\overline{CL}}{\overline{AC}}.$$

Dieser Werth ist aber auch gleich $\overline{LM} : \overline{AB}$, sofern $LM \parallel BA$ durch L gezogen wird; folglich

$$\varepsilon_1 = \frac{\overline{LM}}{\overline{AB}}.$$

ε_1 erlangt seinen grössten Werth, wenn dies bei $\overline{LM}$ eintritt, da die ursprüngliche Faserlänge $\overline{AB}$ als Konstante gilt.

Zur Feststellung von max $(\overline{LM})$ führt nachstehende Betrachtung.

Mit N als Schnittpunkt der Linien GF und AC findet sich

$$\overline{FN} = \overline{FK} + \overline{KN} = \varepsilon \,.\, \overline{AB} + \overline{KC}\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = (\varepsilon + \varepsilon_q)\, \overline{AB}.$$

Ausserdem ist

$$\overline{FJ} = \gamma \,.\, \overline{AB}.$$

Ueber der Hypotenuse NJ des durch FN und FJ bestimmten rechtwinkeligen Dreiecks NFJ beschreiben wir mit NJ als Durchmesser und O als Mittelpunkt einen Kreis, welcher die Punkte L und F in sich enthalten muss (wegen $\measuredangle JLN = 90^0$ und $\measuredangle JFN = 90^0$). Man erkennt nun leicht, dass $\overline{LM}$ seinen grössten Werth erreicht, wenn L, auf dem Kreisbogen sich bewegend, in die durch den Kreismittelpunkt O gehende Horizontale, d. h. nach P gelangt.

Ist O_1 die Projektion von O auf GF, so ergiebt sich

$$\max(\overline{LM}) = \overline{KO_1} + \frac{1}{2}\overline{NJ}.$$

Wegen

$$\overline{KO_1} = \overline{NO_1} - \overline{NK} = \frac{\overline{NF}}{2} - \overline{NK}$$

unter Beachtung, dass

$$\overline{NF} = (\varepsilon + \varepsilon_q)\,\overline{AB},$$

$$\overline{NK} = \overline{CK}\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \varepsilon_q \,.\, \overline{AB},$$

infolge dessen

$$\overline{KO_1} = \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon_q)\,\overline{AB} - \varepsilon_q\,\overline{AB} = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_q)\,\overline{AB},$$

und da

$$\overline{NJ} = \sqrt{\overline{NF}^2 + \overline{JF}^2} = \sqrt{(\varepsilon + \varepsilon_q)^2\,\overline{AB}^2 + \gamma^2 \,.\, \overline{AB}^2}$$

$$= \overline{AB}\sqrt{(\varepsilon + \varepsilon_q)^2 + \gamma^2},$$

so findet sich

$$\max(\overline{LM}) = \frac{1}{2}\overline{AB}(\varepsilon - \varepsilon_q) + \frac{1}{2}\overline{AB}\sqrt{(\varepsilon + \varepsilon_q)^2 + \gamma^2},$$

und hieraus

$$\max\left(\frac{\overline{LM}}{\overline{AB}}\right) = \max(\varepsilon_1) = \frac{1}{2}\left[\varepsilon - \varepsilon_q + \sqrt{(\varepsilon + \varepsilon_q)^2 + \gamma^2}\right]. \quad 168)$$

Unter der Voraussetzung, dass innerhalb der in Betracht gezogenen Stabstrecke senkrecht zur Stabachse Kräfte von Bedeutung überhaupt nicht einwirken, so dass die verhältnissmässige Querzusammenziehung

$$\varepsilon_q = \frac{\varepsilon}{m}$$

gesetzt werden darf (§ 1 und § 7), folgt zunächst

$$\max(\varepsilon_1) = \frac{m-1}{2m}\varepsilon + \frac{m+1}{2m}\sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{m}{m+1}\right)^2\gamma^2} \quad 169)$$

und sodann (nach § 2, Gl. 4, bezw. § 31, Gl. 99) mit

$$\varepsilon = \alpha\sigma,$$

und

$$\gamma = \beta\tau = 2\alpha\frac{m+1}{m}\tau$$

$$\max(\varepsilon_1) = \alpha\left(\frac{m-1}{2m}\sigma + \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right).$$

Hierdurch ist die Grösse von $\max(\varepsilon_1)$ und damit nach Ziff. 1 auch die grösste Anstrengung

$$\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = \frac{m-1}{2m}\sigma + \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad 170)$$

des Materials festgestellt.

Der im Vorstehenden zur Bestimmung der Letzteren beschrittene Weg wurde nach Wissen des Verfassers zuerst von Poncelet eingeschlagen.

Was die Richtung anbetrifft, in welcher die grösste Anstrengung stattfindet, so erkennt man, dass diese mit der Verbindungslinie der Punkte N und P, d. h. mit NP zusammenfällt. Wird nun berücksichtigt, dass $\measuredangle FNP = \varphi$ wegen $\overset{\frown}{FP} = \overset{\frown}{PJ}$ die Hälfte von $\measuredangle FNJ$ ist und dass

$$\operatorname{tg} \measuredangle FNJ = \frac{\overline{FJ}}{\overline{NF}} = \frac{\gamma \cdot \overline{AB}}{(\varepsilon + \varepsilon_q)\overline{AB}},$$

so findet sich

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\gamma}{\varepsilon + \varepsilon_q} = \frac{m}{1+m}\frac{\gamma}{\varepsilon} \quad \ldots \quad 171)$$

Hiermit erscheint die durch φ gegenüber der Stabachse (Richtung der Normalspannung) festgelegte Richtung AC, in welcher die Dehnung ihren grössten Werth erlangt, bestimmt.

Mit

$$\varepsilon = \alpha\sigma, \qquad \gamma = 2\alpha\frac{m+1}{m}\tau$$

wird

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{m\gamma}{(1+m)\varepsilon} = 2\frac{\tau}{\sigma} \quad \ldots \quad 172)$$

Für $\tau = 0$ ergiebt sich $\varphi = 0$, d. h. die grösste Dehnung findet dann in Richtung der Stabachse statt, wie ohne Weiteres klar ist.

Für $\sigma = 0$ wird

$$\varphi = \frac{\pi}{4} = 45^0,$$

wie bereits in § 31, Ziff. 1, festgestellt wurde.

Für $\tau = 0$ ergiebt Gl. 170

$$\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = \sigma,$$

und für $\sigma = 0$

$$\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = \frac{m+1}{m}\tau.$$

Hiernach entspricht die Schubspannung τ allein einer Dehnung

$$\frac{m+1}{m} \alpha \tau,$$

während die Normalspannung σ mit einer solchen im Betrage von

$$\alpha \sigma$$

verknüpft ist. Bei gleicher Grösse der beiden Spannungen ergiebt sich die erstere Dehnung im Verhältniss von $(m+1) : m$ bedeutender, als die Letztere. Soll die Dehnung, d. i. die Anstrengung, in beiden Fällen die gleiche sein, so muss τ im Verhältniss von $m : (m+1)$ weniger betragen als σ, wie bereits aus dem in § 31 Erörterten hervorgeht[1]).

Die Gl. 170 setzt voraus, dass das Material in allen Punkten des Körpers nach allen Richtungen hin gleich beschaffen (isotrop) ist. Diese Voraussetzung trifft nun nicht immer zu, wie dies z. B. bei Walzeisen der Fall ist, dessen Widerstandsfähigkeit namentlich gegenüber Schubspannungen in Ebenen, parallel zur Walzrichtung und senkrecht zur Richtung des beim Walzen ausgeübten Druckes, sich vergleichsweise erheblich geringer erweist. In derartigen Fällen ist es natürlich unzutreffend, den Einfluss der Dehnung ε, welche einer bestimmten Schubspannung entspricht, gegenüber derjenigen Dehnung, welche bei Normalspannungen als höchstens zulässig erachtet wird, nach Massgabe der Gleichung

$$\varepsilon_1 = \frac{m+1}{m} \alpha \tau = \alpha \sigma \quad \ldots \ldots \quad 173)$$

zu beurtheilen. Dann muss vielmehr die Beziehung

$$\gamma = 2 \alpha \frac{m+1}{m} \tau$$

vor Einführung in die Gl. 169 eine Berichtigung oder Ergänzung erfahren, am einfachsten durch Multiplikation mit einem Koefficienten α_0, welcher ganz allgemein die Aufgabe haben soll, dem

[1]) Die thatsächlichen Anstrengungen verhalten sich hiernach nicht wie $\tau : \sigma$, sondern wie $\frac{m+1}{m} \tau : \sigma$.

Umstande Rechnung zu tragen, dass die zulässige Schubspannung zur zulässigen Normalspannung für die zwischen 4 und 3 liegende Grösse m nicht immer in dem Verhältnisse

$$m : (m+1) = 4 : 5 \text{ bis } 3 : 4 = 1 : 1{,}25 \text{ bis } 1 : 1{,}33$$

steht. (S. auch Gl. 101.)

Mit

$$\gamma = 2\alpha \frac{m+1}{m} \alpha_0 \tau$$

geht Gl. 170 über in

$$\left.\begin{aligned} \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) &= \frac{m-1}{2m}\sigma + \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0\tau)^2} \\ \alpha_0 &= \frac{\text{zulässige Anstrengung bei Normalspannung in kg}}{\frac{m+1}{m}\text{ zulässige Anstrengung bei Schubspannung in kg}} \end{aligned}\right\}. \quad 174^1)$$

Mit Rücksicht hierauf werde α_0 als das Verhältniss der zulässigen Anstrengungen für den gerade vorliegenden Fall, oder kurz als Anstrengungsverhältniss bezeichnet.

Setzt man, dem heutigen Stande der Versuchsergebnisse entsprechend und in der Absicht, zu runden Zahlenkoefficienten zu gelangen,

$$m = \frac{10}{3},$$

so gehen die Gleichungen 174 über in

$$\left.\begin{aligned} \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) &= 0{,}35\,\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0\tau)^2} \\ \alpha_0 &= \frac{\text{zulässige Anstrengung bei Normalspannung}}{1{,}3\text{ zulässige Anstrengung bei Schubspannung}} \end{aligned}\right\}. \quad 175)$$

Der Unterschied, welcher sich hinsichtlich der Anstrengung

---

[1]) S. des Verfassers Maschinenelemente, 1881, S. 11, 207, 208, 210, 211, 216 u. s. f., 1891/92, S. 22 u. f., 330, 331 u. s. w.

$\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right)$ ergiebt, je nachdem man $m = 3$ oder $m = 4$ oder einen dazwischen gelegenen Werth setzt, ist übrigens unbedeutend.

Durch die Feststellung in den Gl. 174 und 175 erfüllt der Koefficient α_0 nicht blos seinen Zweck beim Mangel allseitiger Gleichartigkeit des Materials, sondern auch dann, wenn die Werthe für die beiden zulässigen Anstrengungen aus anderen Gründen nicht in dem Verhältnisse $(m+1):m$ stehen. Das wird bei vorhandener Isotropie des Materials allgemein dann der Fall sein, wenn die gleichzeitig auftretenden Normalspannungen und Schubspannungen nicht gleichartig sind, beispielsweise dann, wenn die erstere eine fortgesetzt wechselnde ist (Biegungsanstrengung einer sich drehenden Welle u. s. w.), während die letztere als unveränderlich gelten kann (Drehungsanstrengung derselben Welle bei Ueberwindung eines konstanten Arbeitswiderstandes) u. s. f.[1]).

Bei Entwicklung der grundlegenden Beziehungen 168 bis 170 war in Uebereinstimmung mit der hierfür entworfenen Figur 146 angenommen worden, dass die Dehnung ε (die Normalspannung σ) in Richtung der Stabachse eine positive sei, entsprechend einem an der betreffenden Stelle wirkenden Zug. Ist das Entgegengesetzte der Fall, erfährt der Stab in Richtung seiner Achse eine Zusammendrückung, d. h. sind ε und σ negativ, so führt die gleiche Betrachtung zu dem Ergebniss

$$\max\left(-\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = \frac{m-1}{2m}\sigma + \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \qquad 170a)$$

Hierbei ist σ nur mit seiner absoluten Grösse einzusetzen. Diese Gleichung unterscheidet sich von der Beziehung 170 lediglich dadurch, dass hier die grösste Anstrengung als Druckbeanspruchung erscheint, während sie dort als Zuginanspruchnahme auftrat. Dementsprechend treten an die Stelle der Gleichungen 174 und 175 die Beziehungen

$$\max\left(-\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = \frac{m-1}{2m}\sigma + \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0\tau)^2}, \quad 174a),$$

bezw.

[1]) S. des Verfassers Maschinenelemente 1881, S. 18 u. f., 1891/92, S. 34 u. f.

$$\max\left(-\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 0{,}35\,\sigma + 0{,}65\,\sqrt{\sigma^2 + 4\,(\alpha_0\,\tau)^2}. \qquad 175\text{a})$$

Neben dieser Druckbeanspruchung, wie sie hierdurch bestimmt ist, wird unter Umständen noch eine grösste Zuganstrengung massgebend sein können, nämlich dann, wenn die positive Dehnung, welche der Schiebung γ entspricht (vergl. § 31, S. 148), die Zusammendrückung, welche mit der negativen Normalspannung in Richtung der Stabachse verknüpft ist, bedeutend überwiegt. Diese grösste Zuganstrengung, welche dann gleichzeitig mit der grössten Druckbeanspruchung $\max\left(-\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right)$ auftritt und die mit $\max\left(\frac{\varepsilon_2}{\alpha}\right)$ bezeichnet sei, kann in gleicher Weise ermittelt werden, wie oben die Gleichungen 168 bis 170 gefunden wurden, oder man kann sie unmittelbar aus Gl. 170 ableiten, indem in der Letzteren σ negativ gesetzt wird. Auf beiden Wegen ergiebt sich

$$\max\left(\frac{\varepsilon_2}{\alpha}\right) = -\frac{m-1}{2\,m}\,\sigma + \frac{m+1}{2\,m}\,\sqrt{\sigma^2 + 4\,\tau^2} \qquad 170\text{b})$$

und damit nach Gl. 174 und 175

$$\max\left(\frac{\varepsilon_2}{\alpha}\right) = -\frac{m-1}{2\,m}\,\sigma + \frac{m+1}{2\,m}\,\sqrt{\sigma^2 + 4\,(\alpha_0\,\tau)^2}, \qquad 174\text{b})$$

$$\max\left(\frac{\varepsilon_2}{\alpha}\right) = -\,0{,}35\,\sigma + 0{,}65\,\sqrt{\sigma^2 + 4\,(\alpha_0\,\tau)^2}. \qquad 175\text{b})$$

In diese Beziehungen ist σ natürlich nur mit seiner Grösse ohne Rücksicht auf das Vorzeichen einzuführen.

Der absolute Werth von $\max\left(-\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right)$ ist nach Gl. 170a allerdings grösser als derjenige, welchen Gleichung 170b für $\max\left(\frac{\varepsilon_2}{\alpha}\right)$ liefert. Da aber die zulässige Zuganstrengung in manchen Fällen bedeutend geringer zu sein pflegt, als die zulässige Druckinanspruchnahme, so kann trotzdem $\max\left(\frac{\varepsilon_2}{\alpha}\right)$ massgebend werden.

§ 49. Zug (Druck) und Drehung.

Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äusseren Kräfte ergeben für den in Betracht gezogenen Querschnitt eine in die Richtung der Stabachse fallende Kraft P und ein Kräftepaar vom Momente M_d, dessen Ebene die Stabachse senkrecht schneidet.

In einem beliebigen Element des Querschnitts von der Grösse f wird durch die Zugkraft P eine Normalspannung

$$\sigma = \frac{P}{f}$$

wachgerufen, während das auf Drehung wirkende Moment M_d eine Schubspannung τ erzeugt, welche nach den §§ 32 bis 36 zu bestimmen ist. Da σ für alle Punkte des Querschnittes als gleich gross aufgefasst werden darf, so tritt die bedeutendste Anstrengung da auf, wo τ seinen grössten Werth erlangt.

Nach den Gl. 174 ergiebt sich mit k_z als zulässiger Zug- und k_d als zulässiger Drehungsanstrengung

$$\left.\begin{aligned} k_z &\geqq \frac{m-1}{2m}\sigma + \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0\tau)^2}, \\ \alpha_0 &= \frac{k_z}{\frac{m+1}{m}k_d}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad 176)$$

und mit $m = \frac{10}{3}$

$$\left.\begin{aligned} k_z &\geqq 0{,}35\,\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0\tau)^2} \\ \alpha_0 &= \frac{k_z}{1{,}3\,k_d}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 177)$$

Wirkt P nicht ziehend, sondern drückend, so wird σ negativ, infolge dessen nach Gl. 175a zunächst die mit k als zulässiger Druckanstrengung giltige Beziehung

$$\left.\begin{aligned} k &\geqq 0{,}35\,\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4\,(\alpha_0\,\tau)^2}, \\ \alpha_0 &= \frac{k}{1{,}3\,k_d}, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 178)$$

und sodann auch nach Gl. 175b die Forderung

$$\left.\begin{aligned} k_z &\geqq -\,0{,}35\,\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4\,(\alpha_0\,\tau)^2}, \\ \alpha_0 &= \frac{k_z}{1{,}3\,k_d} \end{aligned}\right\} \quad . \; 178a)$$

befriedigt sein muss. Hierbei ist vorausgesetzt, dass Rücksichtnahme auf Knickung (§ 23) nicht nöthig wird.

Die Werthe von τ können unmittelbar aus der Spalte 3 der Zusammenstellung des § 36 entnommen werden, sofern k_d durch τ ersetzt wird. Die Normalspannung σ tritt nur mit ihrer absoluten Grösse in die Beziehungen 176 bis 178a ein.

§ 50. Biegung und Drehung.

Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äusseren Kräfte ergeben für den betrachteten Querschnitt zwei Kräftepaare, das eine (biegende) vom Momente M_b und das andere (drehende) vom Momente M_d; die Ebene des ersteren schneidet den Querschnitt, diejenige des letzteren die Stabachse senkrecht.

In einem beliebigen Punkte des Querschnitts verursacht

M_b eine Normalspannung σ, welche nach § 16 oder § 21 festzustellen ist,

M_d eine Schubspannung τ, deren Bestimmung nach den §§ 32 bis 34 zu erfolgen hat.

Die für den betreffenden Punkt resultirende Anstrengung ergiebt sich alsdann aus Gl. 174. Bezeichnet k_b die zulässige Biegungs- und k_d die zulässige Drehungsanstrengung, so gilt mit $m = \frac{10}{3}$

$$\left.\begin{aligned} k_b &\geqq 0{,}35\,\sigma + 0{,}65\,\sqrt{\sigma^2 + 4\,(\alpha_0\,\tau)^2}, \\ \alpha_0 &= \frac{k_b}{1{,}3\,k_d}. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad 179)$$

Naturgemäss sind σ und τ für denjenigen Querschnitt und hier für denjenigen Punkt einzuführen, für welchen die rechte Seite den grössten Werth erlangt.

1. Kreisquerschnitt.

Hier fallen die Punkte der grössten Normalspannung

$$\sigma = \frac{32}{\pi}\,\frac{M_b}{d^3} \quad \text{(Gl. 43 u. Gl. 49)}$$

und die Punkte der grössten Schubspannung

$$\tau = \frac{16}{\pi}\,\frac{M_d}{d^3} \quad \text{(Gl. 105)}$$

zusammen, folglich

$$k_b \geqq 0{,}35\,\frac{32}{\pi}\,\frac{M_b}{d^3} + 0{,}65\,\sqrt{\left(\frac{32}{\pi}\,\frac{M_b}{d^3}\right)^2 + \left(\frac{32}{\pi}\,\frac{M_d}{d^3}\,\alpha_0\right)^2}$$

$$k_b \geqq \frac{32}{\pi}\,\frac{1}{d^3}\,[0{,}35\,M_b + 0{,}65\,\sqrt{M_b^2 + (\alpha_0\,M_d)^2}]. \quad 180)$$

Auch für den Kreisringquerschnitt findet dieses Zusammenfallen statt.

2. Elliptischer Querschnitt, Fig. 97.

a) Die Ebene des biegenden Kräftepaares läuft parallel zur kleinen Achse der Ellipse.

Die grösste Normalspannung

$$\sigma = \frac{4}{\pi}\,\frac{M_b}{a\,b^2}$$

tritt hier auf in den Endpunkten B der kleinen Achse (Gl. 43 und 50).

Die Schubspannung erlangt ihren Grösstwerth

$$\tau = \frac{2}{\pi} \frac{M_d}{a\,b^2}$$

an denselben Stellen (Gl. 113).

Hiernach findet die grösste Anstrengung in den Punkten B statt. Demgemäss ergiebt sich aus Gl. 179

$$k_b \geqq 0{,}35 \frac{4}{\pi} \frac{M_b}{a\,b^2} + 0{,}65 \sqrt{\left(\frac{4}{\pi} \frac{M_b}{a\,b^2}\right)^2 + \left(\frac{4}{\pi} \frac{M_d}{a\,b^2} \alpha_0\right)^2}$$

$$k_b \geqq \frac{4}{\pi} \frac{1}{a\,b^2} [0{,}35\, M_b + 0{,}65 \sqrt{M_b^2 + (\alpha_0 M_d)^2}] \,. \qquad 181)$$

b) Die Ebene des biegenden Kräftepaares läuft parallel zur grossen Achse der Ellipse.

Die Normalspannung besitzt ihren Grösstwerth in den Endpunkten A der grossen Achse, während die Schubspannung in den Endpunkten B der kleinen Achse am grössten ausfällt. Infolge dessen muss zunächst ermittelt werden, an welchen Stellen die grösste Anstrengung eintritt.

Dass dieselben auf dem Umfange liegen, ist ohne Weiteres klar. Nun ist nach Gl. 42 die Normalspannung σ im Abstande z' von der kleinen Achse

$$\sigma = \frac{M_b}{\Theta} z' = \frac{M_b}{\frac{\pi}{4} a^3 b} z'$$

und nach Gl. 112 die vom drehenden Moment verursachte Schubspannung in den um z' von derselben Achse abstehenden Umfangspunkten

$$\tau = \frac{2}{\pi} \frac{M_d}{a\,b^2} \sqrt{\left(\frac{y'}{b}\right)^2 + \left(\frac{z'}{a}\right)^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

oder unter Beachtung, dass

$$\left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1 - \left(\frac{z'}{a}\right)^2,$$

$$\tau = \frac{2}{\pi}\,\frac{M_d}{a b^2}\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^4}\,z'^2}.$$

Hieraus ergiebt sich die Anstrengung in den durch z' bestimmten Umfangspunkten zu

$$\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 0{,}35\,\frac{4\,M_b}{\pi\,a^3\,b}\,z' + 0{,}65\sqrt{\left(\frac{4\,M_b}{\pi\,a^3\,b}\,z'\right)^2 + \left(\frac{4\,M_d}{\pi\,a\,b^2}\,\alpha_0\right)^2\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^4}\,z'^2\right)}$$

$$= \frac{4\,M_b}{\pi\,a^3\,b}\left[0{,}35\,z' + 0{,}65\sqrt{z'^2 + \left(\frac{M_d}{M_b}\,\frac{a^2}{b}\,\alpha_0\right)^2\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^4}\,z'^2\right)}\right]. \quad 182)$$

Dieser Ausdruck erlangt seinen Grösstwerth für den durch

$$d\,\frac{\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right)}{dz'} = 0, \qquad z' = z'_0$$

bestimmten Werth z'_0, womit dann

$$k_b \geqq \frac{4\,M_b}{\pi a^2 b}\left[0{,}35\,\frac{z'_0}{a} + 0{,}65\sqrt{\left(\frac{z'_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{M_d}{M_b}\,\frac{a}{b}\,\alpha_0\right)^2\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^4}\,z'^2_0\right)}\right]. \quad 183)$$

Zweckmässiger Weise wird zur Feststellung der grössten Anstrengung auch in der Weise vorgegangen werden können, dass man aus Gl. 182 für verschiedene Werthe von z' die Anstrengungen ermittelt, diese dann in den zugehörigen Abständen als Ordinaten aufträgt, wie dies in § 52 unter a) und b) für den Fall der Beanspruchung auf Biegung und Schub geschehen ist (Fig. 148 und 149), und aus dem Verlaufe der so gewonnenen Kurve die grösste Ordinate mit der Sicherheit bestimmt, welche das zeichnerische Verfahren gestattet.

3. Rechteckiger Querschnitt, Fig. 102.

a) Die Ebene des biegenden Kräftepaares läuft parallel zur kurzen Seite des Rechtecks.

Hier fallen die Stellen der grössten Drehungsanstrengung τ, d. s. die Mitten der langen Seiten, auf solche der grössten Biegungsanstrengung σ, d. s. sämmtliche Punkte der langen Seiten.

Wegen

$$\sigma = 6\frac{M_b}{b^2 h} \quad \text{(Gl. 43 und 47)},$$

$$\tau = 4{,}5\frac{M_d}{b^2 h} \quad \text{(Gl. 122)}$$

ergiebt sich nach Gl. 179

$$k_b \geqq \frac{6}{b^2 h}\left[0{,}35\, M_b + 0{,}65\sqrt{M_b^2 + (1{,}5\,\alpha_0 M_d)^2}\right] \quad 184)$$

und für das Quadrat mit $h = b$

$$k_b \geqq \frac{6}{b^3}\left[0{,}35\, M_b + 0{,}65\sqrt{M_b^2 + (1{,}5\,\alpha_0 M_d)^2}\right] \quad 185)$$

b) Die Ebene des biegenden Kräftepaares läuft parallel zur langen Seite h des Rechtecks.

Hier erlangen σ und τ ihre Grösstwerthe nicht in den gleichen Punkten (σ wird am grössten in den kurzen Seiten, τ dagegen in den Mitten der langen Seiten), infolge dessen in derselben Weise vorzugehen ist, wie unter Ziff. 2, b für den elliptischen Querschnitt angegeben wurde.

c) Die Ebene des biegenden Kräftepaares hat keine der beiden unter a und b bezeichneten Lagen.

Für ein beliebiges, durch y und z bestimmtes Querschnittselement betrug die Biegungsanstrengung σ nach § 21, Ziff. 2, mit den daselbst gebrauchten Bezeichnungen

$$\sigma = M_b \left(\frac{z \cos \beta}{\Theta_1} - \frac{y \sin \beta}{\Theta_2} \right),$$

$$\Theta_1 = \frac{1}{12} b h^3, \qquad \Theta_2 = \frac{1}{12} b^3 h,$$

die Drehungsanstrengung τ folgt aus § 34

$$\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2},$$

und nach Einführung von

$$\left.\begin{aligned} \tau_y &= 9 \frac{M_d}{b^3 h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] y, \\ \tau_z &= 9 \frac{M_d}{b h^3} \left[1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right] z, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 186)$$

$$\tau = 9 \frac{M_d}{b h} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right]^2 \frac{y^2}{b^4} + \left[1 - \left(\frac{2y}{b} \right)^2 \right]^2 \frac{z^2}{h^4}}. \quad 187)$$

Diese Werthe von σ und τ sind nun in die rechte Seite der Gl. 179 einzuführen, hiermit die Punkte, in denen dieser Ausdruck seinen Grösstwerth erlangt, zu ermitteln und sodann der Letztere selbst zu bestimmen, wie dies unter Ziff. 2, b für den Fall des elliptischen Querschnitts angedeutet worden ist.

Hier führt das am Schlusse von Ziff. 2, b angedeutete zeichnerische Verfahren, den Verhältnissen der vorliegenden Aufgabe entsprechend angepasst, zu einer verhältnissmässig raschen Lösung[1]).

---

[1]) Die vorliegende Aufgabe ist beispielsweise zu lösen bei der Berechnung einer Dampfmaschinenkurbel. In des Verfassers Maschinenelementen, 1891/92, S. 474 u. f. findet sich diese Berechnung vollständig durchgeführt. Ausser den Schubspannungen, welche durch das drehende Moment hervorgerufen werden, sind dabei auch noch die von der Schubkraft veranlassten Spannungen berücksichtigt.

§ 51. Zug (Druck) und Schub.

Die äusseren Kräfte liefern für den in Betracht gezogenen Querschnitt f eine in die Richtung der Stabachse fallende Zugkraft P und eine diese senkrecht schneidende Kraft S.

Die mit P verknüpfte und in allen Punkten als gleich angenommene Normalspannung beträgt

$$\sigma = \frac{P}{f},$$

die durch S wachgerufene Schubspannung unter Bezugnahme auf Fig. 126 und mit den in § 39 aufgeführten Bezeichnungen nach Gl. 134 allgemein in dem durch y oder η bestimmten Umfangspunkte

$$\tau' = \frac{S}{2\,y\cos\varphi'}\frac{M_\eta}{\Theta}.$$

Massgebend ist der grösste Werth, welchen τ' erreicht, also beispielsweise

$$\text{für den Kreis} \quad \tau = \frac{4}{3}\frac{S}{\frac{\pi}{4}d^2},$$

$$\text{für das Rechteck} \quad \tau = \frac{3}{2}\frac{S}{b\,h}.$$

Nach Gl. 175 folgt alsdann mit k_z als zulässiger Zuganstrengung und k_s als zulässiger Schubanstrengung

$$\left.\begin{aligned} k_z &\geqq 0{,}35\,\sigma + 0{,}65\,\sqrt{\sigma^2 + 4\,(\alpha_0\,\tau)^2} \\ \alpha_0 &= \frac{k_z}{1{,}3\,k_s}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 188)$$

wobei die Punkte der grössten resultirenden Anstrengung diejenigen sind, in denen die Schubspannung den grössten Werth erlangt.

Wirkt P drückend (Fall der Knickung, § 23, ausgeschlossen), so müssen die aus den Gl. 175a und 175b folgenden Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} k &\geqq 0{,}35\,\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4\,(\alpha_0\,\tau)^2}, \\ \alpha_0 &= \frac{k}{1{,}3\,k_s}, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad 188\,a)$$

und

$$\left.\begin{aligned} k_z &\geqq -\,0{,}35\,\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4\,(\alpha_0\,\tau)^2}, \\ \alpha_0 &= \frac{k_z}{1{,}3\,k_s} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad 188\,b)$$

befriedigt sein.

§ 52. Biegung und Schub.

Die auf den geraden stabförmigen Körper wirkenden äusseren Kräfte ergeben für den betrachteten Querschnitt ein Kräftepaar M_b, dessen Ebene den Querschnitt senkrecht schneidet, und eine in den Letzteren fallende Kraft S.

1. Anstrengung des Materials.

In einem beliebigen Querschnittselement verursacht

M_b eine Normalspannung σ, welche nach § 16 oder § 21 festzustellen ist,

S eine Schubspannung τ, zu deren Bestimmung die Gl. 135 zur Verfügung steht.

Da die Letztere unter der Voraussetzung entwickelt wurde, dass die Schubkraft S in eine Symmetrielinie des Querschnitts fällt, so muss auch hier diese Beschränkung bezüglich der Lage von S getroffen werden. Demgemäss werde vorausgesetzt, dass der Querschnitt symmetrisch ist und dass die Ebene des biegenden Kräftepaares M_b den Querschnitt in der Symmetrielinie schneide. Dann folgt nach § 16 und § 39 unter Bezugnahme auf Fig. 126, sowie mit den daselbst gewählten Bezeichnungen:

für die in allen um η von der wagrechten Schwerlinie abstehenden Querschnittselementen gleich grosse Normalspannung

$$\sigma = \frac{M_b}{\Theta}\,\eta\,,$$

und für die in den Umfangspunkten $P'P'$ ihren Grösstwerth erlangende Schubspannung

$$\tau' = \frac{S}{2y\cos\varphi'}\,\frac{M_\eta}{\Theta}\,.$$

Demnach mit k_b und k_s als zulässiger Biegungs- bezw. Schubanstrengung aus Gl. 175 die grösste Anstrengung in diesen Punkten

$$\left.\begin{aligned} k_b &\geqq \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) \\ &= 0{,}35\,\frac{M_b}{\Theta}\,\eta + 0{,}65\,\sqrt{\left(\frac{M_b}{\Theta}\,\eta\right)^2 + 4\left(\frac{S}{2y\cos\varphi'}\,\frac{M_\eta}{\Theta}\,\alpha_0\right)^2} \\ \alpha_0 &= \frac{k_b}{1{,}3\,k_s}\,. \end{aligned}\right\} \quad 189)$$

Hierbei ist derjenige Querschnitt in Betracht zu ziehen, sowie für η derjenige Werth einzuführen, wodurch der Ausdruck auf der rechten Seite seinen Grösstwerth annimmt, und zu beachten, dass im Allgemeinen S und M_b nicht in ein und demselben Querschnitt ihre Grösstwerthe zu erlangen brauchen.

a) Kreisquerschnitt, Fig. 129.

Unter Voraussetzung der durch Fig. 147 dargestellten Belastungsweise ergiebt sich

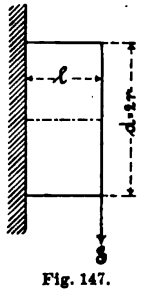


Fig. 147.

$$M_b = S\,l$$

und mit

$$\Theta = \frac{\pi}{4} r^4, \qquad \eta = r \sin \varphi',$$

$$\sigma = \frac{S\,l}{\frac{\pi}{4} r^4} r \sin \varphi' = \frac{4}{\pi} \frac{Sl}{r^3} \sin \varphi'.$$

Gemäss § 39, Gl. 138 ist

$$\tau' = \frac{4}{3} \frac{S}{\pi r^2} \cos \varphi',$$

somit nach Gl. 175

$$k_b \geqq \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right)$$

$$= 0{,}35 \frac{4}{\pi} \frac{Sl}{r^3} \sin \varphi' + 0{,}65 \sqrt{\left(\frac{4}{\pi} \frac{Sl}{r^3} \sin \varphi' \right)^2 + 4 \left(\frac{4}{3} \alpha_0 \frac{S}{\pi r^2} \cos \varphi' \right)^2},$$

$$k_b \geqq \max \left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha} \right) = \frac{S\,l}{\frac{\pi}{4} r^3} \left[0{,}35 \sin \varphi' + 0{,}65 \sqrt{\sin^2 \varphi' + \left(\frac{2}{3} \alpha_0 \frac{r}{l} \cos \varphi' \right)^2} \right].$$

Wird hierin das Anstrengungsverhältniss $\alpha_0 = 1$ gesetzt, d. h.

$$k_b = 1{,}3\, k_s \quad \text{oder} \quad k_s = 0{,}77\, k_b,$$

und ausserdem die von dem biegenden Moment herrührende Normalspannung

$$\frac{S\,l}{\frac{\pi}{4} r^3},$$

welche, in der äussersten Faser stattfindend, die massgebende Anstrengung sein würde, wenn die Schubkraft gleich Null wäre, durch σ_b ersetzt, so findet sich

$$k_b \geqq \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right)$$

$$= \sigma_b \left[0{,}35 \sin\varphi' + 0{,}65 \sqrt{\sin^2\varphi' + \left(\frac{2}{3}\frac{r}{l}\cos\varphi'\right)^2}\right]. \quad . \quad 190)$$

Behufs Gewinnung eines Urtheils über das Gesetz, nach welchem sich die resultirende Anstrengung mit $\frac{r}{l}$ und φ' ändert, werde dieselbe für verschiedene Werthe von $\frac{r}{l}$ und φ' ermittelt.

$\alpha)$ $l = r = \frac{d}{2}$.

Aus Gl. 190 wird

$$\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = \sigma_b \left[0{,}35 \sin\varphi' + 0{,}65 \sqrt{\sin^2\varphi' + \left(\frac{2}{3}\cos\varphi'\right)^2}\right]$$

und damit

für $\varphi' = 0^0$ $\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 0{,}43\,\sigma_b$ im Punkte 0, Fig. 148,

„ $\sin\varphi' = 0{,}25$ $\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 0{,}54\,\sigma_b$ „ „ 1, „ „ ,

„ $\varphi' = 30^0$ $\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 0{,}67\,\sigma_b$ „ „ 2, „ „ ,

„ $\varphi' = 45^0$ $\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 0{,}80\,\sigma_b$ „ „ 3, „ „ ,

„ $\varphi' = 60^0$ $\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 0{,}91\,\sigma_b$ „ „ 4, „ „ ,

„ $\varphi' = 90^0$ $\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}00\,\sigma_b$ „ „ 5, „ „ ,

Wir ziehen durch die Kreispunkte 0, 1, 2, 3, 4, 5, Fig. 148,

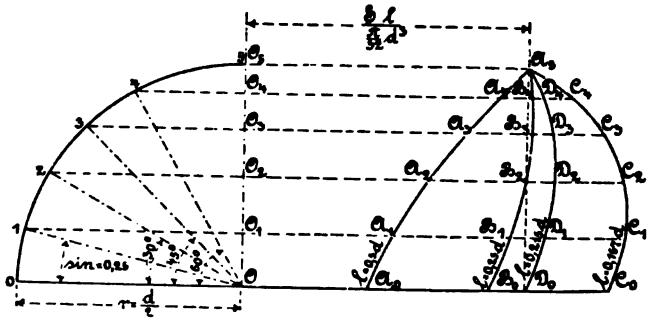


Fig. 148.

wagrechte Gerade und tragen alsdann von den Punkten O, O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 des senkrechten Halbmessers $O O_5$ die Strecken

$$\overline{O A_0} = 0{,}43, \qquad \overline{O_1 A_1} = 0{,}54, \qquad \overline{O_2 A_2} = 0{,}67,$$

$$\overline{O_3 A_3} = 0{,}80, \qquad \overline{O_4 A_4} = 0{,}91, \qquad \overline{O_5 A_5} = 1{,}00,$$

auf und erhalten so in der Schaulinie $A_0 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ ein Bild über das Gesetz, nach welchem sich die von σ und τ herrührende Anstrengung von Punkt zu Punkt des Umfanges ändert. Im Punkte 0 ist $\sigma = 0$, und deshalb τ' allein massgebend, im Punkte 5 dagegen ist $\tau' = 0$ und deshalb σ allein bestimmend für die Anstrengung. Wir erkennen, dass im vorliegenden Falle, d. h. bei

$$l = r = \frac{d}{2},$$

gemäss den Verhältnissen der Fig. 147, die der grössten Schubspannung entsprechende Anstrengung noch nicht die Hälfte derjenigen Anstrengung beträgt, welche im Umfangspunkte 5 durch die Normalspannung allein bedingt wird. Würde man, wie dies nicht selten für derartige Verhältnisse angegeben ist, den Stab auf Schubinanspruchnahme berechnen, so läge hierin ein Fehler von über 100 %.

$$\beta) \quad l = \frac{1}{2} r = \frac{d}{4} .$$

Gl. 190, welche hiermit übergeht in

$$\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = \sigma_b \left[0{,}35 \sin\varphi' + 0{,}65 \sqrt{\sin^2\varphi' + \left(\frac{4}{3}\cos\varphi'\right)^2}\right]$$

liefert

für $\varphi' = 0^0$ $\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 0{,}87\,\sigma_b$,

„ $\sin\varphi' = 0{,}25$ $\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 0{,}94\,\sigma_b$,

„ $\varphi' = 30^0$ $\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 0{,}99\,\sigma_b$,

„ $\varphi' = 45^0$ $\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}01\,\sigma_b$,

„ $\varphi' = 60^0$ $\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}01\,\sigma_b$,

„ $\varphi' = 90^0$ $\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}00\,\sigma_b$.

Die bildliche Darstellung liefert in Fig. 148 die Schaulinie $B_0 B_1 B_2 B_3 B_4 A_5$. Wir erkennen, dass auch für $l = 0{,}5\, r = 0{,}25\, d$ die grösste in der Nullachse eintretende Schubanstrengung noch wesentlich kleiner ist, als die Anstrengung, welche im Punkte 5 von dem biegenden Moment allein veranlasst wird. Der Grösstwerth der resultirenden Anstrengung liegt zwischen $\varphi' = 45^0$ und $\varphi' = 60^0$ und überschreitet σ_b um rund 1,5 %.

$$\gamma) \quad l = \frac{1}{3} r = \frac{d}{6} .$$

In gleicher Weise, wie unter a und b, erhalten wir hier

$$\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = \sigma_b \left[0{,}35 \sin\varphi' + 0{,}65 \sqrt{\sin^2\varphi' + (2\cos\varphi')^2}\right]$$

und

$$\text{für} \quad \varphi' = 0^0 \qquad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}30\,\sigma_b\,,$$

$$\text{„} \quad \sin\varphi' = 0{,}25 \qquad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}35\,\sigma_b\,,$$

$$\text{„} \quad \varphi' = 30^0 \qquad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}35\,\sigma_b\,,$$

$$\text{„} \quad \varphi' = 45^0 \qquad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}28\,\sigma_b\,,$$

$$\text{„} \quad \varphi' = 60^0 \qquad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}16\,\sigma_b\,,$$

$$\text{„} \quad \varphi' = 90^0 \qquad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}00\,\sigma_b\,,$$

Die zugehörige Kurve ergiebt sich in $C_0 C_1 C_2 C_3 C_4 A_5$. Wie ersichtlich, überschreitet hier die Schubanstrengung in der Nullachse die Biegungsanstrengung im Punkt 5 um 30 %, also bedeutend. Der Grösstwerth der resultirenden Anstrengung findet sich in einem zwischen $0{,}25\,r$ und $0{,}5\,r$ gelegenen Abstande von der Nullachse und überschreitet die Anstrengung in Letzterer um etwa 4 %, also nur um wenig; hiernach würde es zulässig sein, bei

$$l = \frac{d}{6}$$

den Stab nur auf Schubinanspruchnahme zu berechnen.

δ) $l = 0{,}43\,r = 0{,}215\,d$.

Im Falle

$$l = \frac{d}{4}$$

ergab sich die Schubanstrengung in der Stabmitte zu 0,87 der Biegungsanstrengung im Abstande r, für

$$l = \frac{d}{6}$$

dagegen um 30 % grösser, als die Letztere. Es ist nun von Interesse, festzustellen, für welches Verhältniss $l : r$ beide gleich werden.

Dasselbe muss nach Gl. 190 mit

$$\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = \sigma_b \qquad \varphi' = 0$$

sich ergeben aus

$$1 = 0{,}65\,\frac{2}{3}\,\frac{r}{l}$$

zu

$$\frac{l}{r} = \frac{1{,}3}{3} = 0{,}43.$$

Wird dieser Werth in Gl. 190 eingeführt, so folgt

$$\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = \sigma_b\left[0{,}35\sin\varphi' + 0{,}65\sqrt{\sin^2\varphi' + \left(\frac{2}{3}\,\frac{3}{1{,}3}\cos\varphi'\right)^2}\right]$$

und hieraus

für $\varphi' = 0^0$ $\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}00\,\sigma_b$,

„ $\sin\varphi' = 0{,}25$ $\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}07\,\sigma_b$,

„ $\varphi' = 30^0$ $\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}10\,\sigma_b$,

„ $\varphi' = 45^0$ $\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}09\,\sigma_b$,

„ $\varphi' = 60^0$ $\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}06\,\sigma_b$,

„ $\varphi' = 90^0$ $\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}00\,\sigma_b$.

Die bildliche Darstellung liefert in Fig. 148 die Schaulinie $D_0\,D_1\,D_2\,D_3\,D_4\,A_5$ mit dem Grösstwerth der Anstrengung ungefähr in halber Höhe. Derselbe beträgt rund 10% mehr als die Schubanstrengung in der Nullachse und um ebensoviel mehr als die Biegungsanstrengung im Punkte 5.

Fassen wir das im Vorstehenden unter α bis δ Gefundene zusammen, so ergiebt sich Folgendes:

Bei der Belastungsweise des kreiscylindrischen Stabes nach Fig. 147 genügt es, denselben mit Rücksicht auf die Biegungsanstrengung

$$\sigma_b = \frac{S\,l}{\frac{\pi}{32}\,d^3} = \sim \frac{10\,S\,l}{d^3}$$

allein zu berechnen, so lange l nicht wesentlich kleiner als $\frac{d}{4}$ ist. Beträgt l erheblich weniger, als $\frac{d}{4}$, so erscheint es ausreichend, nur die Schubanstrengung

$$\tau = \frac{4}{3}\,\frac{S}{\frac{\pi}{4}\,d^2}$$

zu berücksichtigen[1]).

Der etwaige Fehler, der hierbei begangen wird und nach Massgabe der soeben durchgeführten Berechnungen beurtheilt werden kann, liegt innerhalb des Genauigkeitsgrades, welcher bei Festigkeitsrechnungen erreichbar zu sein pflegt.

Die Berechnung auf Schubanstrengung allein in Fällen, in denen

$$l \geqq \frac{d}{4},$$

erscheint unzutreffend, insbesondere dann, wenn

$$\tau = \frac{S}{\frac{\pi}{4}\,d^2}$$

gesetzt wird.

(Vergl. auch die in § 40 mitgetheilten Versuchsergebnisse, sowie die Fussbemerkung S. 225.)

---

[1]) Hiernach hat die Bestimmung der Abmessungen des Körpers von gleichem Widerstande, Fig. 55, in der Nähe der Punkte A und B zu erfolgen, wobei

$$S = P\frac{b}{l}, \quad \text{bezw.} \quad P\frac{a}{l}$$

ist. Streng genommen wäre die Stabform überhaupt auf Grund der Gl. 189 festzustellen und hierbei darauf Rücksicht zu nehmen, dass die Kraft P, wie auch S über eine, wenn auch kleine Strecke vertheilt angreift.

Ist das Anstrengungsverhältniss α_0 von 1, welcher Werth den besonderen Erörterungen unter α bis δ zu Grunde liegt, wesentlich verschieden, so wird auf die Gleichung

$$\max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = \sigma_b\left[0{,}35\sin\varphi' + 0{,}65\sqrt{\sin^2\varphi' + \left(\frac{2}{3}\alpha_0\frac{r}{l}\cos\varphi'\right)^2}\right]$$

zurückgegriffen werden müssen.

b) Rechteckiger Querschnitt.

In ganz entsprechender Weise, wie unter a) gelangen wir, sofern b die Breite, h die Höhe des Rechtecks bedeutet und die Richtung von S parallel zu h läuft, mit

$$M_b = Sl \text{ (s. Fig. 147)}$$

zu

$$\sigma = \frac{Sl}{\frac{1}{12}bh^3}\eta,$$

und nach Gl. 131 zu

$$\tau = \frac{3}{2}\frac{S}{bh}\left[1 - \left(\frac{\eta}{\frac{h}{2}}\right)^2\right],$$

giltig für die Spannungen im Abstand η von der Nullachse.

Unter der Voraussetzung $\alpha_0 = 1$ liefert Gl. 189

$$k_b \geqq \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right)$$

$$= \sigma_b\left\{0{,}35\cdot\frac{\eta}{\frac{h}{2}} + 0{,}65\sqrt{\left(\frac{\eta}{\frac{h}{2}}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{h}{l}\right)^2\left[1-\left(\frac{\eta}{\frac{h}{2}}\right)^2\right]^2}\right\}, \quad 191)$$

wenn die Biegungsspannung der äussersten Faser

$$\frac{Sl}{\frac{1}{6}bh^2} = \sigma_b$$

gesetzt wird.

Wählen wir $l = 0{,}325\,h$, so findet sich

$$\text{für } \eta = 0 \qquad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}00\,\sigma_b,$$

$$\text{„ } \eta = \frac{1}{8}h \quad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}04\,\sigma_b,$$

$$\text{„ } \eta = \frac{1}{4}h \quad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 0{,}99\,\sigma_b,$$

$$\text{„ } \eta = \frac{3}{8}h \quad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 0{,}91\,\sigma_b,$$

$$\text{„ } \eta = \frac{1}{2}h \quad \max\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right) = 1{,}00\,\sigma_b.$$

Die bildliche Darstellung giebt die Fig. 149. Wie ersichtlich,

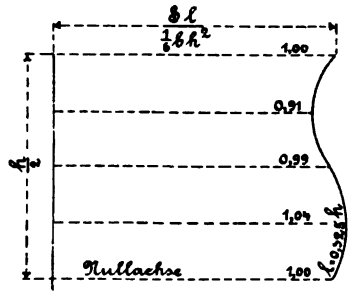


Fig. 149.

erlangt die Anstrengung zwischen der Nullachse und

$$\eta = \frac{h}{2}$$

einen grössten und einen kleinsten Werth. Ersterer überschreitet σ_b um etwa 4 %, Letzterer bleibt um 9 % darunter. Die Anstrengung in der Nullachse (lediglich Schub) ist gleich der Anstrengung in der äussersten Faser (nur Biegung). Würde $l < 0{,}325\,h$ genommen, so übersteigt die Erstere die Letztere; für $l > 0{,}325\,h$ tritt das Entgegengesetzte ein.

Demgemäss folgt:

Ist bei dem Stabe mit rechteckigem Querschnitt, belastet nach Massgabe der Fig. 147, $l \geqq 0{,}325\,h$, so genügt es, ihn mit Rücksicht auf die Biegungsbeanspruchung

$$\sigma_b = \frac{6\,S\,l}{b\,h^2}$$

allein zu berechnen; beträgt dagegen $l \leqq 0{,}325\,h$, so reicht es aus, lediglich die Schubbeanspruchung

$$\tau = \frac{3}{2}\,\frac{S}{b\,h}$$

der Berechnung zu Grunde zu legen[1]).

Die Rücksichtnahme auf die Schubkraft allein, bei l erheblich grösser als $0{,}325\,h$, muss unzutreffende Ergebnisse liefern. (Vergl. Fussbemerkung S. 225.)

Wenn das Anstrengungsverhältniss α_0 von 1 wesentlich abweicht, so ist auf Gl. 189 zurückzugehen.

c) I-Querschnitt.

Für Querschnitte dieser und ähnlicher Art lassen sich so einfache Festsetzungen, wie sie unter a) und b) für den Kreis, bezw. das Rechteck ausgesprochen werden konnten, nicht aufstellen. Hier muss im einzelnen Falle die Gl. 189 unter Beachtung der daselbst angeschlossenen Bemerkung, sowie des in § 39 d Gesagten zum Ausgangspunkt genommen werden.

Hinsichtlich der erforderlichen Stärke des Steges pflegt für den Fall, dass nicht Herstellungsrücksichten die Entscheidung treffen, die Fernhaltung von Ausbiegungen (Knickung) und nicht die Schubspannung in der Nullachse bestimmend zu sein, namentlich dann, wenn die Belastung des Trägers örtlich zusammengedrängt angreift, wie Versuche mit eisernen I-Trägern lehren und wie sich auch unter Beachtung der geringen Widerstandsfähigkeit verhältnissmässig dünner Wandungen gegenüber

[1]) Hiernach sind die Abmessungen der in der Nähe des Punktes B gelegenen Querschnitte der Körper gleicher Festigkeit, Fig. 53 und Fig. 54, zu bestimmen. Vergl. auch Fussbemerkung zu a, S. 290.

Einflüssen, welche auf seitliche Ausbiegung hinwirken, aus dem unter „IV. Knickung“ Erörterten ohne Weiteres ergiebt, selbst unter Voraussetzung einer (in Bezug auf den Trägerquerschnitt) symmetrischen Belastung. Oft ist jedoch auf eine solche nicht zu rechnen, beispielsweise dann nicht, wenn die Belastung durch Querbalken erfolgt, die mit ihren Enden aufliegen. Indem sich dieselben unter ihrer Last durchbiegen, belasten sie den inneren Theil der Trägerflansche stärker, während der äussere Theil entlastet wird. Die Kraft geht nicht mehr durch die Mitte des Steges; sie kann bei entsprechender Flanschenbreite für den Steg unter Umständen ein verhältnissmässig sehr bedeutendes Biegungsmoment ergeben.

Um die Formänderung eines in der Mitte hinsichtlich des Querschnittes symmetrisch belasteten und an den Enden unterstützten Trägers deutlich erkennen zu lassen, wurde ein Träger von 200 mm Höhe aus Hartblei[1]) (Flanschen: 70 mm breit, 20 mm stark, Steg: 10 mm stark, Entfernung der Auflager 500 mm) vor der Belastung mit einem Quadratnetz versehen. Fig. 155, Taf. XII, giebt das Bild des mittleren Theiles dieses Trägers, wie er sich infolge der Belastung gestaltet hat, wieder. Von Interesse ist namentlich die Verfolgung der Aenderungen, welche die Form einzelner Quadrate erfahren hat.

2. Formänderung.

a) Im Allgemeinen.

Ein prismatischer Stab sei in der aus Fig. 59 ersichtlichen Weise belastet. Die auf denselben wirkenden äusseren Kräfte ergeben — abgesehen von dem Eigengewicht —

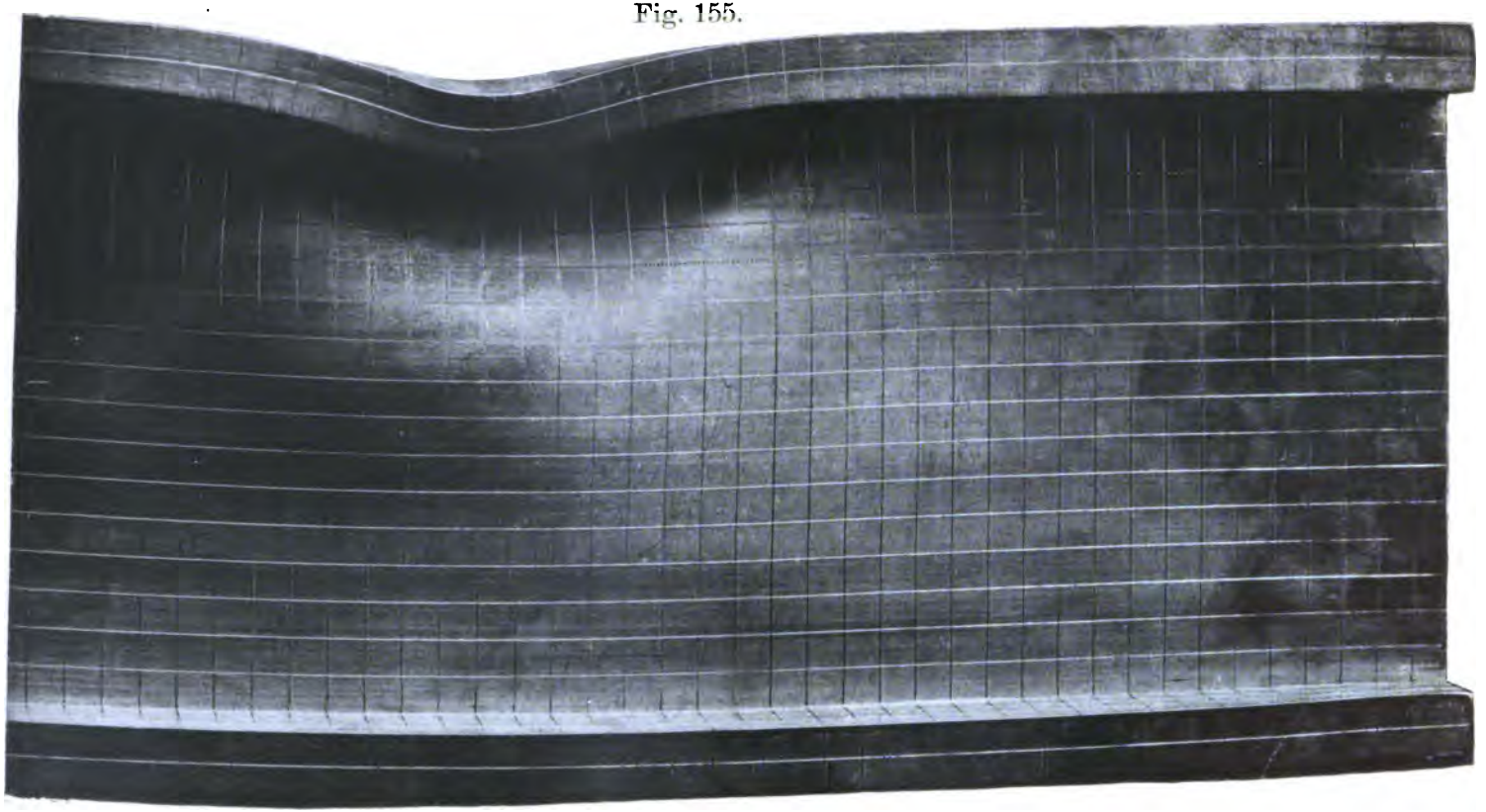
a) für jeden innerhalb der Strecke AB gelegenen Querschnitt ein biegendes Kräftepaar vom konstanten Moment $M_b = Pa$; infolge dessen die elastische Linie zwischen A und B (vergl § 16, Gl. 40) einen Kreisbogen vom Halbmesser

$$\varrho = \frac{\Theta}{\alpha M_b}$$

bildet;

[1]) Vergl. Fussbemerkung S. 160.

Fig. 155.



b) für die Querschnitte ausserhalb der Strecke AB, je nach ihrem Abstand von der Querschnittsebene A, bezw. B ein verschieden grosses, zwischen Pa (im Querschnitt bei A, bezw. B) und Null (in den Endquerschnitten) liegendes Moment und eine Schubkraft P.

Um uns ein anschauliches Bild über die hierbei auftretenden Formänderungen zu verschaffen, ziehen wir auf dem unbelasteten Stabe, dessen Querschnitt ein Rechteck mit der Breite b und der in der Bildebene liegenden Höhe h sein mag, nach Massgabe der Fig. 150, welche den halben Stab von der Länge $a + \frac{l}{2}$ darstellt, gerade Linien und zwar zunächst parallel zur Stabachse, die als Achsenlinien bezeichnet werden sollen, und sodann senkrecht zu Letzteren, d. s. Querschnittslinien, je in gleichem Abstande von einander. Hierdurch wird die Seitenfläche von der Höhe h in eine Anzahl gleicher Rechtecke eingetheilt.

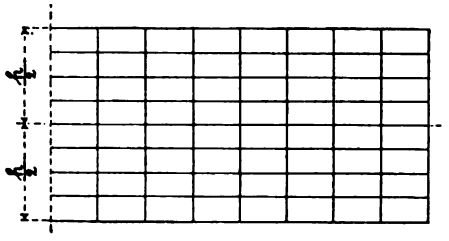


Fig. 150.

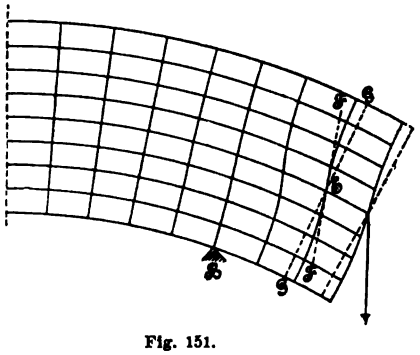


Fig. 151.

Unter Einwirkung der Belastung — Fig. 59 — wird der Stab eine Aenderung seiner Gestalt erfahren, wobei die Rechtecke ebenfalls ihre Form ändern müssen.

Für die Stabquerschnitte zwischen A und B liefert die Belastung, wie oben unter a) bereits hervorgehoben wurde, lediglich ein biegendes Moment. Demgemäss werden nach § 16 die oberhalb der Nullachse gelegenen Fasern eine mit ihrem Abstande von dieser zunehmende Dehnung, die unterhalb gelegenen eine entsprechende Zusammendrückung erfahren. Die ursprünglich parallelen Querschnitte sind jetzt gegen einander geneigt, ihr früherer Abstand ist nur noch in der Stabachse vorhanden. Es treten lediglich Normalspannungen auf, Schubspannungen fehlen; infolge dessen müssen die auf die Stabfläche gezeichneten Achsen- und Querschnittslinien die rechten Winkel, unter denen sie sich ursprünglich schnitten, beibehalten: die ursprünglichen Rechtecke gehen in Kreisringsektoren über. Fig. 151 lässt dieselben für die rechte Hälfte von AB (Fig. 59) erkennen.

Auf die rechts von B gelegenen Querschnitte wirkt, wie oben unter b) bereits bemerkt, ausser dem biegenden Moment noch eine Schubkraft, welche Schubspannungen wachruft, die nach § 38 (s. namentlich Fig. 125) im Abstande $+\frac{h}{2}$ und $-\frac{h}{2}$ von der Nullachse d. h. in der oberen und in der unteren Begrenzungsfläche des Stabes, sofern hier äussere Kräfte nicht angreifen, Null sein müssen, während sie nach der Achse hin zunehmen und in Letzterer den grössten Werth erreichen. Daraus folgt, dass die auf der Staboberfläche gezogenen Querschnittslinien auch ausserhalb der Strecke AB — Fig. 59 — die im Abstande $+\frac{h}{2}$ und $-\frac{h}{2}$ befindliche Begrenzungslinien da, wo äussere Kräfte nicht angreifen, rechtwinklig schneiden müssen, dass sie dagegen die nach der Stabachse zu gelegenen Achsenlinien schiefwinklig zu treffen haben. Die Abweichung von der Rechtwinkligkeit wird in der Stabachse ihren grössten Werth erreichen. Nach Fig. 151 muss, sofern GG in E senkrecht zur gekrümmten Stabachse und FF Tangente im Punkte E der Querschnittslinie ist, dieser Grösstwerth gleich dem Bogen γ_{max} des Winkels FEG sein und mit der durch Gleichung 132 bestimmten Schubspannung

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{P}{b\,h}$$

in der Beziehung

$$\gamma_{max} = \beta \tau_{max}$$

stehen, worin β den Schubkoefficienten bedeutet (§ 29). Für eine beliebige, um η von der Nullachse abstehende Stelle ist die Schubspannung nach Gl. 131

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{P}{b h} \left[1 - \left(\frac{\eta}{\frac{h}{2}} \right)^2 \right]$$

und somit die Abweichung von der Rechtwinkligkeit

$$\gamma = \beta \tau = \frac{3}{2} \frac{P}{b h} \left[1 - \left(\frac{\eta}{\frac{h}{2}} \right)^2 \right] \beta.$$

Für

$$\eta = \pm \frac{h}{2}$$

wird $\gamma = 0$, wie bereits hervorgehoben.

Dem Vorstehenden gemäss wird der ursprünglich ebene Querschnitt auch dann, wenn er unter Einfluss des biegenden Momentes eben geblieben ist, durch die Einwirkung der Schubkraft in eine gekrümmte Fläche übergehen, wie dies Fig. 151 rechts von B — in übertrieben gezeichneter Weise — erkennen lässt. Diese Wölbungslinie, welche in der Stabachse eine Wendepunkt besitzt, ist hiernach eine nothwendige Folge der besprochenen Veränderlichkeit der Schubspannung. Eine strenge Darstellung derselben wird zu berücksichtigen haben, dass die äusseren Kräfte nicht in einem Punkte oder einer Linie, sondern in einer Fläche den Stab treffen, sodass also beispielsweise die Querschnitte unmittelbar rechts vom Mittelpunkte oder der Mittelebene B des Auflagers nicht sofort die volle Krümmung annehmen, während die unmittelbar links davon gelegenen auch nicht mehr vollkommen eben sein können.

Die Feststellung der besprochenen Querschnittswölbung auf dem Wege des Versuches begegnet grossen Schwierigkeiten. Um die Krümmung deutlich zu machen, sind im Vergleich zur Länge verhältnissmässig hohe Stäbe zu verwenden; dann aber müssen zur

Herbeiführung einer für den bezeichneten Zweck genügenden Formänderung so bedeutende Kräfte auf verhältnissmässig kleine Theile der Staboberfläche wirken, dass hier starke örtliche Formänderungen eintreten, welche die Reinheit des Bildes erheblich beeinträchtigen. Soll dieser Uebelstand vermieden werden, so wird man suchen müssen, dem Stabe eine solche Gestalt zu geben, dass schon weit kleinere Schubkräfte erhebliche Schubspannungen wachrufen. Ein solcher Körper ist in Fig. 152 dargestellt: ⌶-Träger, in der Mittellinie zum Theil ausgebohrt, so dass zur Uebertragung der Schub-

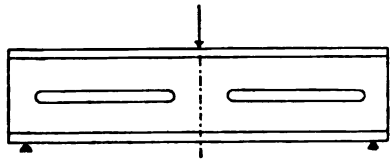


Fig. 152.

kräfte in der Stabachse nur ein verhältnissmässig kleiner Querschnitt zur Verfügung steht, weshalb hier die Schubspannungen bedeutend ausfallen müssen. Wird der Stab in der Mitte belastet und an den Enden unterstützt, so nimmt die ursprünglich ebene Stirnfläche die Gestalt Fig. 153 (Schmiedeisenträger), Taf. XIII, an. Dieselbe entspricht der Form, welche in Fig. 151 rechts von B angegeben wurde: Die gedrückten Fasern widerstreben der Verkürzung, die gezogenen der Verlängerung infolge der Kleinheit des Querschnittes, durch welchen sich die Druckkräfte (oberhalb der Nullachse) und die Zugkräfte (unterhalb dieser Achse) in's Gleichgewicht setzen, mit sichtbarem Erfolg.

Wie das rechts gezeichnete Trägerende erkennen lässt, erfolgt das innen seinen Anfang nehmende Einreissen des Stabes zunächst in einer Richtung von ungefähr 45° gegen die Richtung der Schubspannung, entsprechend dem Umstande, dass die Dehnung, welche mit der Schubspannung verknüpft ist, unter einem Winkel von 45° zu dieser ihren grössten Werth erreicht (§ 31, Ziff. 1).

b) Durchbiegung mit Rücksicht auf die Schubkraft.

Ein prismatischer Stab sei auf zwei um l von einander abstehenden Stützen aufgelagert und in der Mitte durch die Kraft P

Fig. 153.

Taf. XIII.

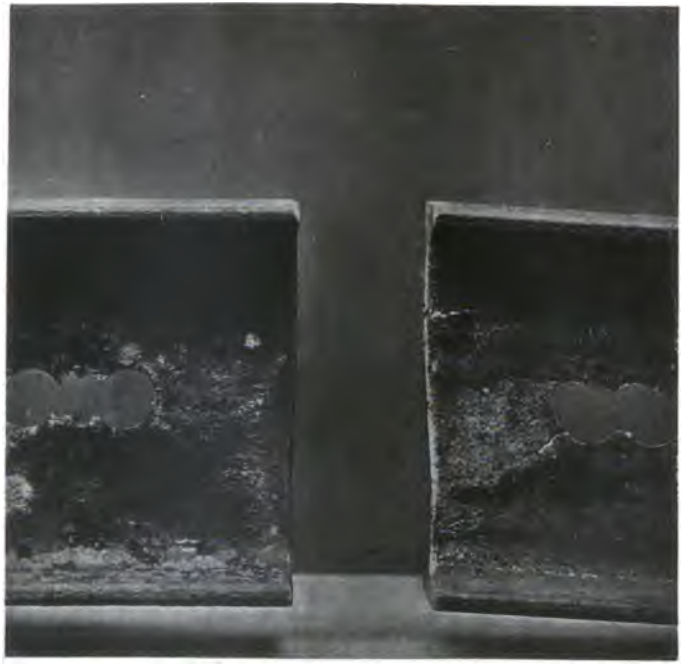


Fig. 218.

belastet. Die Durchbiegung, welche von P veranlasst wird, setzt sich aus zwei Theilen zusammen: aus derjenigen Durchbiegung, welche von dem biegenden Moment (in der Mitte $M_b = \frac{P\,l}{4}$) allein verursacht wird, und aus der Verschiebung, welche die Querschnitte durch die Schubkraft $\frac{P}{2}$ (Auflagerdruck) erfahren.

Die Durchbiegung der ursprünglich geraden Stabachse im mittleren Querschnitt infolge des biegenden Moments beträgt nach Gl. 60

$$y' = \frac{\alpha}{48}\frac{P\,l^3}{\Theta},$$

sofern Θ das gegenüber der Biegung in Betracht kommende Trägheitsmoment des Stabquerschnittes bedeutet.

Zur Feststellung desjenigen Theiles der thatsächlichen Durchbiegung, welcher von der Verschiebung der Querschnitte herrührt, führt die nachstehende Betrachtung.

$A\,B\,C\,D$, Fig. 154, sei ein zwischen den beiden Querschnitten $A\,C$ und $B\,D$ gelegenes Körperelement des unbelasteten Stabes.

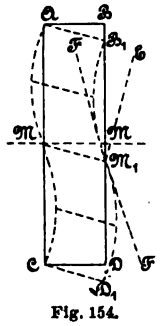


Fig. 154.

Denken wir uns jetzt im Querschnitte $B\,D$ eine abwärts wirkende Schubkraft S thätig, während $A\,C$ festgehalten wird, so rückt der Querschnitt $B\,D$ um einen gewissen Betrag $\overline{B\,B_1} = \overline{M\,M_1} = \overline{D\,D_1}$ abwärts. Unter der Voraussetzung gleichmässiger Vertheilung der Schubkraft S über den Querschnitt würde die Aenderung des Körperelements darin bestehen, dass das Rechteck $A\,B\,D\,C$ in das Parallelogramm $A\,B_1\,D_1\,C$ übergeht. Die Querschnitte würden Ebenen bleiben. Da nun aber die Schubspannungen von der Mitte

nach aussen (d. i. von M_1 nach B_1 und D_1) hin bis auf Null abnehmen, so müssen dies die Schiebungen ebenfalls thun und damit auch die äussersten Elemente der Querschnittslinien die Begrenzungsstrecken AB_1 und CD_1 senkrecht schneiden, d. h. die Querschnitte müssen sich krümmen, wie in Fig. 154 gestrichelt angegeben ist. Die Strecke MM_1 der Achse, welche ursprünglich die Lage MM einnahm und hierbei mit der Querschnittslinie BD einen rechten Winkel bildete, weist jetzt, sofern $M_1E \perp MM_1$ und FF Tangente im Punkte M_1 der Querschnittslinie ist, eine Abweichung um den Winkel FM_1E von dieser Rechtwinkligkeit auf. Nach aussen hin nimmt diese Abweichung ab bis auf Null. Wie wir wiederholt gesehen, misst der Bogen γ, welcher diesem Abweichungswinkel entspricht, die Schiebung und steht nach Gl. 94 zu der Schubspannung τ an der betreffenden Stelle in der Beziehung

$$\gamma = \beta\,\tau.$$

Für die Stabachse weist $\gamma(\tau)$ seinen Grösstwerth auf und zwar ist

$$\gamma_{max} = \operatorname{tg} \sphericalangle\, EM_1F = \sim \operatorname{arc} \sphericalangle\, EM_1F.$$

Der Winkel EM_1F setzt sich aus zwei Theilen zusammen, nämlich

$$\sphericalangle\, EM_1F = \sphericalangle\, EM_1B_1 + \sphericalangle\, B_1M_1F.$$

Der erste Theil ist gleich

$$\sphericalangle\, BAB_1 = \sphericalangle\, MMM_1 = \sphericalangle\, DCD_1.$$

Er entspricht also der senkrechten Verschiebung des ganzen Querschnitts, während der zweite Theil die Folge der Querschnittskrümmung ist. Für die Ermittlung der Durchbiegung y'' infolge der Verschiebung des Querschnitts kann demnach nur der erste Theil in Betracht kommen[1]). Dieselbe erscheint dadurch bestimmt,

---

[1]) Die Ermittlung der von der Schubkraft S bewirkten Durchbiegung y'' nach dem Vorgange Poncelet's und Grashof's — Theorie der Elasticität und Festigkeit, 1878, S. 213 u. f. — derart, dass gesetzt wird

$$y'' = \int \gamma_{max}\,dx = \beta \int \tau_{max}\,dx,$$

muss, wie vorstehende Darlegung erkennen lässt, y'' zu gross ergeben. In den-

dass die mechanische Arbeit, welche die Schubkraft beim Sinken um $\overline{BB_1} = \overline{MM_1} = \overline{DD_1}$ verrichtet, gleich sein muss der Summe der Arbeiten der Schubspannungen beim Uebergang des Stabelementes $ABCD$ in die Form AB_1CD_1 mit gekrümmter Querschnittsfläche.

---

jenigen Fällen, in welchen die Rücksichtnahme auf y'' überhaupt in Frage zu kommen pflegt (vergl. § 22, S. 108 und 109, auch weiter oben), ist übrigens der Einfluss dieses Zugross nicht von erheblicher Bedeutung.

Die vorstehende Betrachtung über die Wölbung der ursprünglich ebenen Querschnitte eines durch Schub in Anspruch genommenen Körpers lässt sich auch auf den durch ein drehendes Kräftepaar belasteten Stab übertragen, wie folgende Bemerkungen, die der Einfachheit wegen einen bestimmten und zwar rechteckigen Querschnitt voraussetzen mögen, erkennen lassen.

Das Gesetz, nach welchem sich die Schubspannung in den Querschnittselementen der Umfangsstrecke AC des auf Drehung beanspruchten rechteckigen Stabes, Fig. 102, ändert, ist das gleiche, dem die Schubspannungen des durch die Schubkraft belasteten rechteckigen Stabes, Fig. 125, folgen; bei beiden Körpern entspricht der Verlauf der Spannungskurve einer Parabel. Wir haben demnach im ersteren Falle (Drehung) für die in der Umfangsstrecke AC liegenden Querschnittselemente auch dasselbe Krümmungsgesetz zu erwarten, wie im zweiten Falle. Thatsächlich zeigen die auf der Staboberfläche liegenden Querschnittslinien der Fig. 100, Taf. VII, den gleichen Verlauf, der sich in Fig. 154 fand. Auch für Fig. 100 ergiebt die Abweichung von der Rechtwinkligkeit, d. i. der Winkel, welcher die Schiebung und damit die Schubspannung misst, zwei Theile, von denen der eine die Verschiebung der Querschnittselemente senkrecht zur Stabachse bestimmt, während der andere der eingetretenen Neigung des Querschnittselements entspricht. Für die Mitte der längeren Seite erreichen beide den grössten Werth. Hier wird ihre Summe gemessen durch das Produkt aus τ'_a (Gl. 122) und β, während der erste Theil durch den Drehungswinkel ϑ (Gl. 154) bestimmt erscheint, so dass der zweite Theil, d. i. die Neigung, welche die gewölbte Querschnittslinie, Fig. 100, in der Mitte der längeren Seite (im Wendepunkte) gegenüber dem ursprünglichen Querschnitt besitzt, den Bogen

$$4{,}5\,\frac{M_d}{b^3 h}\beta - 3{,}6\,\frac{b^2+h^2}{b^3 h^3}M_d\beta\frac{b}{2} = 4{,}5\,\frac{M_d}{b^2 h}\left[0{,}6 - 0{,}4\left(\frac{b}{h}\right)^2\right]\beta$$

$$= \tau'_a\left[0{,}6 - 0{,}4\left(\frac{b}{h}\right)^2\right]\beta$$

ergiebt.

Je grösser h im Vergleich zu b, um so bedeutender wird diese Neigung; sie nähert sich hierbei asymptotisch dem Werthe

$$4{,}5\,.\,0{,}6\,\frac{M_d}{b^2 h}\beta = 2{,}7\,\frac{M_d}{b^2 h}\beta = 0{,}6\,\tau'_a\beta.$$

Nach § 44 findet sich für die mechanische Arbeit, welche die Formänderung des $\overline{AB} = \overline{MM} = \overline{CD} = dx$ langen Körperelementes bei der Verschiebung fordert,

$$\frac{\beta}{2} \cdot dx \iint \tau'^2 \, d\eta \, dz.$$

Für $h = b = a$, d. h. für den quadratischen Querschnitt wird sie am kleinsten, nämlich gleich

$$4{,}5 \,.\, 0{,}2 \frac{M_d}{a^3} \beta = 0{,}9 \frac{M_d}{a^3} \beta = 0{,}2 \tau_a' \beta.$$

Fig. 100, Taf. VII und Fig. 101, Taf. VIII (vergl. je die gewölbte Querschnittslinie mit der ursprünglich geraden, durch Striche bezeichneten Querschnittslinie) bestätigen die Abnahme der Neigung mit Näherung von h an b.

Würde man z. B. für den quadratischen Querschnitt diese Neigung dem eigentlichen Drehungswinkel zuzählen, indem man setzt

$$\vartheta \frac{a}{2} = \tau_a' \beta = 4{,}5 \frac{M_d}{a^3} \beta,$$

so ergäbe sich

$$\vartheta = 9 \frac{M_d}{a^3} \beta,$$

welcher Werth mit der von Grashof in seiner Theorie der Elasticität und Festigkeit 1878, S. 144 gefundenen Grösse (Gl. 246) übereinstimmt.

Nach Massgabe unserer Darlegungen erscheint somit diese um

$$100 \frac{9 - 7{,}2}{7{,}2} = 25\,\%$$

zu gross. Wie aus den Erörterungen des Verfassers „über die heutige Grundlage der Berechnung auf Drehung beanspruchter Körper" in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1889, S. 139 erhellt, ergiebt sich in Uebereinstimmung hiermit der Drehungswinkel nach der Grashof'schen Gleichung

für Gusseisen um

$$100 \frac{1{,}43 - 1{,}20}{1{,}20} = 19\,\%,$$

für Schmiedeisen und Stahl um

$$100 \frac{0{,}883 - 0{,}696}{0{,}696} = 27\,\%$$

grösser, als Bauschinger durch Messung bestimmte (vergl. auch Schluss von § 43).

Hierin ist unter Bezugnahme auf Fig. 126 und nach Gl. 135

$$\tau = \frac{S}{2\,y\cos\varphi}\,\frac{M_\eta}{\Theta}$$

die Schubspannung in dem um z von der η-Achse abstehenden Punkte P, der mit dem Flächenelemente $d\eta\,dz$ zusammenfällt.

Wird nun $\overline{BB_1} = \overline{MM_1} = \overline{DD_1}$ mit dy'' bezeichnet, so erhalten wir

$$\frac{1}{2}\,S\,dy'' = \frac{\beta}{2}\,dx\iint \tau^2\,d\eta\,dz$$

$$dy'' = \frac{\beta}{S}\,dx\iint \tau^2\,d\eta\,dz$$

$$y'' = \beta\int\frac{dx}{S}\iint \tau^2\,d\eta\,dz\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 192)$$

sofern der Schubkoefficient β unveränderlich ist.

Beispielsweise findet sich für den rechteckigen Querschnitt von der Breite b und der Höhe h (vergl. Schluss von § 44), da hier wegen $\varphi = \varphi' = 0$ die Schubspannung für alle in demselben Abstande η gelegenen Flächenelemente gleich ist, nämlich

$$\tau' = \tau = \frac{3}{2}\,\frac{S}{b\,h}\left[1 - \left(\frac{\eta}{\frac{h}{2}}\right)^2\right],$$

so dass an die Stelle von $d\eta\,dz$ sofort der Flächenstreifen $b\,d\eta$ treten kann,

$$y'' = \frac{9}{4}\,\beta\int\frac{S\,dx}{b\,h^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\left[1 - \left(\frac{\eta}{\frac{h}{2}}\right)^2\right]^2 d\eta = \frac{6}{5}\,\beta\int\frac{S}{b\,h}\,dx \quad 193)$$

und bei Unveränderlichkeit von S, b und h innerhalb der Strecke x

$$y'' = \frac{6}{5}\,\beta\,\frac{S}{b\,h}\,x$$

d. i. $\frac{6}{5} = 1{,}2$ mal so gross, als wenn die Schubkraft sich gleichmässig über den Querschnitt vertheilt haben würde.

Für den in der Mitte durch P belasteten prismatischen Stab folgt unter Vernachlässigung des Eigengewichtes wegen

$$S = \frac{P}{2},$$

$$y'' = \frac{6}{5}\beta \frac{\frac{1}{2}P}{bh}\frac{l}{2} = 0{,}3\,\beta \frac{P}{bh} l. \quad \ldots \quad 194)$$

Hiernach die Gesammtdurchbiegung des rechteckigen Stabes in der Mitte

$$y' + y'' = \frac{\alpha}{48}\frac{P l^3}{\frac{1}{12} b h^3} + 0{,}3\,\beta \frac{P}{bh} l$$

$$= \left\{ 0{,}25\,\alpha \left(\frac{l}{h}\right)^2 + 0{,}3\,\beta \right\} \frac{P}{bh} l.$$

Wird der Schubkoefficient β nach Gl. 99 durch

$$\beta = 2\,\frac{m+1}{m}\,\alpha$$

ersetzt, so folgt

$$y' + y'' = \left\{ 0{,}25 \left(\frac{l}{h}\right)^2 + 0{,}6\,\frac{m+1}{m} \right\} \alpha \frac{P}{bh} l \quad 195)$$

und mit $m = \frac{10}{3}$

$$y' + y'' = \left\{ 0{,}25 \left(\frac{l}{h}\right)^2 + 0{,}78 \right\} \alpha \frac{P}{bh} l. \quad \ldots \quad 196)$$

Hierin bestimmt das erste Glied der Klammer den Einfluss des biegenden Momentes auf die Durchbiegung, während das zweite denjenigen der Schubkraft zum Ausdruck bringt. Das Verhältniss von y'' zu y' ist demnach

$$\frac{y''}{y'} = \frac{0{,}78}{0{,}25\left(\frac{l}{h}\right)^2} = \frac{3{,}12}{\left(\frac{l}{h}\right)^2}.$$

Es beträgt

für $l =$	$2h$	$4h$	$8h$	$16h$
	0,78 : 1	0,195 : 1	0,049 : 1	0,012 : 1.

Von praktischer Bedeutung kann die Rücksichtnahme auf y'' werden, wenn es sich um die Ermittlung des Dehnungskoefficienten α aus Biegungsversuchen mit Stäben oder Trägern handelt, deren Höhe erheblich ist, worauf bereits § 22, Ziff. 1 aufmerksam gemacht wurde. Durch die bisher übliche Vernachlässigung von y'' beging man im Falle des rechteckigen Querschnittes bei $l = 1000$ mm und

$h = \frac{l}{4} = 250$ mm einen Fehler von 19,5 %,

$h = \frac{l}{8} = 125$ „ „ „ „ 4,9 „

$h = \frac{l}{16} = 62{,}5$ „ „ „ „ 1,2 „

Hieraus folgt, dass die Höhe der Stäbe verhältnissmässig nicht bedeutend sein darf, wenn die Ausserachtlassung von y'' zulässig erscheinen soll.

Allgemein wird zur Bestimmung von α oder $\frac{1}{\alpha}$ aus Versuchen mit Stäben von rechteckigem Querschnitt die Gl. 195 zu verwenden sein. Dieselbe liefert

$$\alpha = \frac{b\,h}{\left\{0{,}25\left(\frac{l}{h}\right)^2 + 0{,}6\,\frac{m+1}{m}\right\} l} \cdot \frac{y' + y''}{P}.$$

Hierbei ist streng genommen m für das untersuchte Material besonders zu bestimmen; doch erweist sich der Einfluss der Abweichung der besonders ermittelten Werthe von dem Mittelwerth $\frac{10}{3}$

als so unbedeutend, dass es genügt, α aus der Gl. 196, d. h. nach

$$\alpha = \frac{b\,h}{\left\{0{,}25\left(\frac{l}{h}\right)^2 + 0{,}78\right\} l}\,\frac{y' + y''}{P}$$

zu berechnen. $y' + y''$ wird zu jedem Werthe von P beobachtet und damit für jede Belastung der Dehnungskoefficient α bestimmbar.

Ganz bedeutenden Einfluss erlangt unter Umständen die Schubkraft auf die Durchbiegung bei I-Trägern, da hier im Steg die Querschnittsbreite gering, also γ und τ gross sein können. (Vergl. Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure 1888 S. 222 u. f., sowie § 22, Ziff. 1.)

Der Einfluss des in § 46 erörterten Widerstandes, welcher aus Anlass des Gleitens der Staboberfläche auf den Stützen (infolge der Durchbiegung) entsteht, ist bei strengen Biegungsversuchen mit erheblich hohen Stäben durch Verwendung von Rollenauflagern nach Möglichkeit herabzumindern.

Im Falle des Kreisquerschnitts vom Halbmesser $r = \frac{d}{2}$ findet sich nach Gl. 138 für die Umfangspunkte P' die Schubspannung

$$\tau' = \frac{4}{3}\,\frac{S}{\pi r^2}\cos\varphi'.$$

Die Schubspannung τ (Fig. 126), welche in dem beliebigen um η von der Nullachse und um z von der η-Achse abstehenden Punkt P wirkt, werde in ihre zwei Komponenten zerlegt:

die eine senkrecht zur y-Achse sei $\tau_y = \tau\cos\varphi$,
die andere senkrecht zur η-Achse $\tau_\eta = \tau\sin\varphi$.

Nach § 39 ist die Erstere für alle im gleichen Abstand z liegenden Flächenelemente konstant, also

$$\tau_y = \tau'\cos\varphi' = \frac{4}{3}\,\frac{S}{\pi r^2}\cos^2\varphi' = \tau_y',$$

während die Letztere, von aussen nach der Mitte zu bis auf Null abnehmend, in den Umfangspunkten P' die Grösse

$$\tau_\eta' = \tau' \sin \varphi' = \tau_y \operatorname{tg} \varphi',$$

in dem beliebigen um z von der η-Achse abstehenden Punkte P den Werth

$$\tau_\eta = \tau_y \operatorname{tg} \varphi = \tau_y \frac{z}{y} \operatorname{tg} \varphi'$$

besitzt.

Wegen

$$\tau^2 = \tau_y^2 + \tau_\eta^2 = \left(1 + \frac{z^2}{y^2} \operatorname{tg}^2 \varphi'\right) \tau_y^2$$

ergiebt Gl. 192

$$y'' = \beta \int \frac{dx}{S} \int \tau_y^2 \, d\eta \int_{-y}^{+y} \left(1 + \frac{z^2}{y^2} \operatorname{tg}^2 \varphi'\right) dz$$

$$= 2\beta \int \frac{dx}{S} \int \left(1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \varphi\right) y \, \tau_y^2 \, d\eta.$$

Hieraus folgt mit

$$\tau_y = \frac{4}{3} \frac{S}{\pi r^2} \cos^2 \varphi', \quad y = r \cos \varphi', \quad d\eta = d(r \sin \varphi') = r \cos \varphi' d\varphi',$$

$$y'' = \frac{32\beta}{27\pi r^2} \int S \, dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (3 + \operatorname{tg}^2 \varphi') \cos^6 \varphi' \, d\varphi'$$

$$= \frac{32\beta}{27\pi r^2} \int S \, dx,$$

und sofern S unveränderlich innerhalb der Strecke x

$$y'' = \frac{32}{27} \beta \frac{S}{\pi r^2} x$$

d. i.

$\frac{32}{27} = 1{,}185$ mal so gross, als wenn die Schubkraft sich gleichmässig über den Querschnitt vertheilt haben würde.

Für den Fall des auf beiden Enden im Abstande l gestützten und in der Mitte mit P belasteten Stabes ist unter Vernachlässigung des Eigengewichts $S = \frac{P}{2}$ und damit

$$y'' = \frac{32}{27}\frac{\beta}{\pi r^2}\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{P}{2}\,dx = \frac{32}{27}\,\beta\,\frac{\frac{P}{2}}{\pi r^2}\,\frac{l}{2}$$

$$= \frac{8}{27}\,\beta\,\frac{P}{\pi r^2}\,l = \frac{8}{27}\,\beta\,\frac{P}{\frac{\pi}{4}d^2}\,l. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 197)$$

Hiernach beträgt die Gesammtdurchbiegung

$$y' + y'' = \frac{\alpha}{48}\,\frac{P l^3}{\frac{\pi}{64}d^4} + \frac{32}{27}\,\beta\,\frac{P}{\pi d^2}\,l$$

$$= \left\{\frac{4}{3}\,\alpha\left(\frac{l}{d}\right)^2 + \frac{32}{27}\,\beta\right\}\frac{P}{\pi d^2}\,l.$$

Mit

$$\beta = 2\,\frac{m+1}{m}\,\alpha$$

wird

$$y' + y'' = \left\{\frac{1}{3}\left(\frac{l}{d}\right)^2 + \frac{16}{27}\,\frac{m+1}{m}\right\}\alpha\,\frac{P}{\frac{\pi}{4}d^2}\,l, \quad 198)$$

und für $m = \frac{10}{3}$

$$y' + y'' = \left\{\frac{1}{3}\left(\frac{l}{d}\right)^2 + 0{,}77\right\}\alpha\,\frac{P}{\frac{\pi}{4}d^2}\,l. \quad . \quad . \quad . \quad 199)$$

Unter Umständen erscheint es vortheilhaft, die nach Massgabe des Vorstehenden ermittelte Grösse y'' allgemein in Vergleich zu stellen mit derjenigen Verschiebung, die sich ergiebt, wenn man die (thatsächlich nicht zutreffende) Annahme macht, dass sich die

Schubkraft S gleichmässig über den Querschnitt f vertheile. Diese Unterstellung führt für das Körperelement von der Länge dx zu

$$\gamma\, dx = \beta\, \tau\, dx = \beta \frac{S}{f}\, dx,$$

während Gl. 192 für dasselbe liefert

$$\beta \frac{\int\int \tau^2\, d\eta\, dz}{S}\, dx.$$

Demnach das Verhältniss μ der letzteren Grösse (der thatsächlichen Verschiebung) zu der ersteren (der unterstellten Verrückung)

$$\mu = \frac{f}{S^2} \int\int \tau^2\, d\eta\, dz. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 200)$$

Der Koefficient μ, welcher für jeden Querschnitt besonders ermittelt werden muss[1]) und welcher als Koefficient der Querschnittsverschiebung bezeichnet werden kann, ist dann diejenige Zahl, mit welcher die unter Voraussetzung gleichmässiger Spannungsvertheilung gewonnene Verschiebung multiplicirt werden muss, um die thatsächliche zu erhalten. Beispielsweise beträgt derselbe für das Rechteck 1,2, für den Kreis 1,185[2]) — wie wir oben bereits gefunden haben —, für I-Querschnitt steigt er bis auf 3 und darüber.

§ 53. Frage der Einspannung eines Stabes.

Wie in § 18, Ziff. 1, 3 und später erörtert, sowie benützt, liegt dem Begriff der Einspannung eines auf Biegung in Anspruch genommenen Stabes die Auffassung zu Grunde, dass an der Einspannstelle die elastische Linie von der ursprünglich geraden Stabachse berührt wird, d. h., dass in diesem Punkte die letztere Tan-

[1]) Ritter hat sich in den „Anwendungen der graphischen Statik", Zürich 1888, No. 32 und 36 mit dieser Aufgabe eingehend und erfolgreich befasst.

[2]) Die in der Literatur zu findende Angabe $\mu = 1{,}11$ beruht auf der Voraussetzung, dass die oben in der Rechnung auftretende Schubspannung τ_η für alle Querschnittselemente gleich Null sei.

gente an der elastischen Linie ist. Hierdurch wird dieser an der Einspannstelle eine bestimmte Ordinate, sowie eine bestimmte Richtung zugewiesen.

Die Einspannung stellt man sich hierbei nicht selten in der Weise vor, dass das eingespannte Ende durch zwei, von entgegengesetzten Seiten stützende Auflager, die man als unbeweglich und unzusammendrückbar betrachtet, gehalten wird, wie Fig. 156

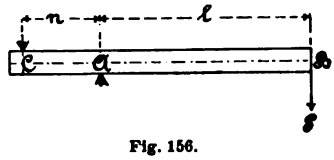


Fig. 156.

zeigt. Als Einspannstelle gilt der Querschnitt A. Zur Bestimmung der beiden in A und C wirkenden Auflagerdrücke denken wir uns in A eine senkrecht abwärts gerichtete Kraft $+P$ und eine zweite vertikal aufwärts wirkende Kraft $-P$ angebracht. Da sich diese zwei Kräfte gegenseitig aufheben, wird hierdurch nichts an dem Gleichgewichtszustande geändert. Wir haben alsdann mit der am freien Ende B angreifenden Last P — das Eigengewicht des Stabes werde vernachlässigt — drei Kräfte. $+P$ können wir uns aufgehoben vorstellen unmittelbar durch die Stütze A, während $-P$ und die Last P ein rechtsdrehendes Kräftepaar vom Moment Pl bilden, zu dessen Auffangung in A und C je der Widerlagsdruck P_1 erforderlich ist, welcher durch die Gleichung

$$P_1 n = P l$$

zu

$$P_1 = P \frac{l}{n}$$

bestimmt wird.

Demnach ergiebt sich der Widerlagsdruck in A

$$N_a = P + P \frac{l}{n} = P\left(1 + \frac{l}{n}\right)$$

und derjenige in C

$$N_c = P \frac{l}{n}.$$

Je kleiner n im Vergleich zu l, um so bedeutender werden die Kräfte N_a und N_c ausfallen. Selbst wenn man sich diese nicht in dem Punkte oder in der Linie A bezw. C zusammengedrängt angreifend denkt, sondern auf kleine Flächen vertheilt vorstellt, so werden sie doch eine Zusammendrückung des Materials der Stützen A und C, sowie der Oberfläche des Stabes an den Angriffsstellen zur Folge haben. Hiermit aber ist eine Abwärtsbewegung des Stabes bei A und eine — unter sonst gleichen Umständen wegen $N_a > N_c$ jedoch geringere — Aufwärtsbewegung desselben bei C verknüpft. Der ganze Stab wird sich — abgesehen von der Verschiebung seiner Querschnitte gegen einander, sowie von seiner Biegung — gegen seine ursprüngliche Lage neigen müssen, entsprechend der Drehung um einen zwischen A und C befindlichen Punkt, welcher infolge $N_a > N_c$ bei sonst gleichen Verhältnissen näher an C als an A gelegen ist. Wir erkennen, dass die Stützung des Stabes nach Fig. 156 die Auffassung nicht

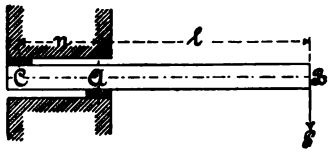


Fig. 157.

rechtfertigt, die elastische Linie, d. i. die gekrümmte Achse des durch P gebogenen Stabes habe an der Einspannstelle (d. i. in A) die ursprünglich gerade Stabachse zur Tangente.

Nur dann, wenn n verhältnissmässig gross gewählt wird und die Flächen, gegen welche sich der Stab bei A und C legt, so bedeutend sind, dass die Zusammendrückung der Stützen und ihrer Widerlager, sowie die örtliche Zusammenpressung des Stabes als unerheblich betrachtet werden dürfen, erscheint diese Auffassung mit Annäherung zulässig. Wir gelangen dann zur Konstruktion Fig. 157 mit zwei Auflagerplatten unter A bezw. über C.

Genauer würde die in Frage stehende Auffassung zutreffen im Falle der Fig. 158, wenn der Stab in der Mitte A eine genügend grosse Auflagerfläche besitzt, sodass die Zusammendrückung da-

selbst verschwindend wenig beträgt und wenn er an den beiden Enden gleich starke Belastung erfährt. Dann fällt die Richtung der Tangente im Punkt A der elastischen Linie mit der Richtung

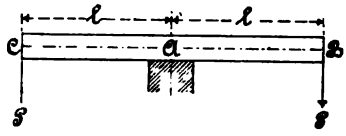


Fig. 158.

der früher geraden Stabachse zusammen. Bei erheblicher Zusammendrückung des Widerlagers und des Stabes würde im Punkte A nur Parallelismus zwischen beiden bestehen.

Wird der Stab, dessen Querschnitt ein Rechteck von der Breite b und der Höhe h sei, nach Massgabe der Fig. 159 derart befestigt, dass er in unbelastetem Zustande unter Vernachlässigung des Eigengewichtes die obere und untere Wandung, gegen die er sich legt, gerade spannungslos berührt, so liefert die Verlegung der Kraft P in die Mitte zwischen A und C die daselbst senkrecht abwärts wirkende Kraft P und ein rechtsdrehendes Kräftepaar vom Moment $P\left(l+\frac{a}{2}\right)$.

Unter Voraussetzung gleichmässiger Vertheilung von P über die Fläche $a\,b$ ergiebt sich die von P allein herrührende Pressung p_1, zwischen dem Stab und der unteren Wandungsfläche,

$$p_1 = \frac{P}{a\,b}.$$

In Fig. 160 ist dieselbe dargestellt.

Das Moment $P\left(l+\frac{a}{2}\right)$ ruft gegenüber der rechten Hälfte der unteren Wandungsfläche von aussen nach innen zu abnehmende Pressungen wach, während die obere Wandungsfläche auf der linken Hälfte aufwärts gerichtete, von der Mitte nach aussen wachsende Pressungen erfährt, wie in Fig. 161 dargestellt ist. Mit der Ge-

nauigkeit, mit welcher die Gl. 43 auf den vorliegenden Fall angewendet werden darf, findet sich wegen

$$\sigma_1 = p_2, \qquad M_b = P\left(l + \frac{a}{2}\right), \qquad \Theta = \frac{1}{12} b\, a^3, \qquad e_1 = \frac{a}{2}$$

die Pressung

$$p_2 = \frac{P\left(l + \frac{a}{2}\right)}{\frac{1}{6} b\, a^2} = 6\,\frac{P}{a\,b}\left(\frac{l}{a} + \frac{1}{2}\right).$$

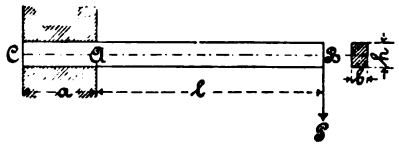


Fig. 159.

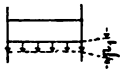


Fig. 160.

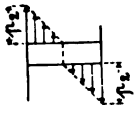


Fig. 161.

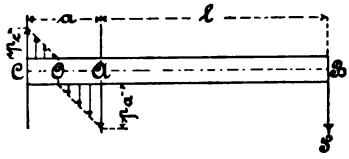


Fig. 162.

Hiermit folgt die resultirende Pressung in der Kante bei A

$$p_a = p_1 + p_2 = \frac{P}{a\,b} + 6\,\frac{P}{a\,b}\left(\frac{l}{a} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\,\frac{P}{a\,b}\left(2 + 3\,\frac{l}{a}\right), \quad \ldots\ldots \quad 201)$$

und an derjenigen bei C

$$p_c = -p_1 + p_2 = -\frac{P}{ab} + 6\frac{P}{ab}\left(\frac{l}{a} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\frac{P}{ab}\left(1 + 3\frac{l}{a}\right) \quad \ldots\ldots \quad 202)$$

In Fig. 162 ist diese Spannungsvertheilung dargestellt. Naturgemäss darf p_a den für die betreffenden Materialien (Stab, Stütze) noch höchstens für zulässig erachteten Werth der Druckanstrengung nicht überschreiten.

Infolge der örtlichen Zusammenpressung des Stabes, wie auch der Zusammendrückung des Materials der Wandung wird sich die Stabachse um den Punkt O drehen, dessen Abstand η von der Mitte der Wandung sich aus der Erwägung ergiebt, dass

$$p_2 \frac{\eta}{\frac{a}{2}} = p_1,$$

$$6\frac{P}{ab}\left(\frac{l}{a} + \frac{1}{2}\right)\frac{\eta}{\frac{a}{2}} = \frac{P}{ab},$$

$$\eta = \frac{a}{12\left(\frac{l}{a} + \frac{1}{2}\right)}.$$

Demnach

$$\overline{AO} = \frac{a}{2} + \eta = \frac{a}{2}\left[1 + \frac{1}{6\left(\frac{l}{a} + \frac{1}{2}\right)}\right].$$

Wir erkennen, dass auch hier die ursprünglich gerade Stabachse im Einspannungsquerschnitt A die elastische Linie nicht berühren kann.

Würde der Stab im unbelasteten Zustande, d. h. für $P = 0$, die obere und die untere Wandungsfläche nicht spannungslos, son-

dern mit einer gewissen Pressung p_0 berühren[1]), was z. B. der Fall sein kann, wenn auf dem Balken ein Theil des Gewichts der darüber aufgeführten Mauer lastet, so wird sich die Stabachse auch hier innerhalb der Wandung drehen, jedoch nicht soviel, wie folgende Betrachtung erkennen lässt. Durch die Pressung p_0 findet zunächst eine Zusammenpressung der sich berührenden Oberflächen statt, so dass bei Beginn der Einwirkung der Belastung P die betreffenden Flächen des Stabes und der Wandung sich bereits in weit vollkommenerer Weise berühren, als bei ursprünglich spannungsloser Befestigung; infolge dessen der in Frage kommende Einfluss der von P veranlassten Pressungen kleiner ausfallen muss. Auch die Reibung, welche zwischen Wandung und Stab mit innerhalb der Wandung eintretender Biegung (vergl. § 46) wachgerufen wird, wirkt in diesem Sinne und zwar um so stärker, je grösser p_0.

In ähnlicher Weise wie bei dem nur einerseits gestützten Stabe gelangt man hinsichtlich des beiderseits befestigten Stabes, Fig. 52, S. 82, zu der Erkenntniss, dass infolge der Zusammendrückbarkeit des Materials der Wandungen und des Stabes Einspannung in dem strengen Sinne, in welchem sie von der Rechnung für ihre Zwecke aufgefasst wird, auch nicht angenähert vorhanden zu sein pflegt. Recht anschaulich tritt dies vor das Auge, wenn man in einzelnen Fällen, für welche ermittelt werden soll, ob der Stab als eingespannt betrachtet werden darf, zunächst unterstellt, der Stab liege beiderseits frei auf, und sodann die Neigung der elastischen Linie über den Stützen bestimmt; hierauf prüft, ob der Stab durch die Befestigung in Wirklichkeit, wenn auch nicht vollständig, so doch ausreichend verhindert ist, diese Neigung anzunehmen. Hierbei wird in der Regel gefunden werden, dass man schon zur Befestigungsweise Fig. 157 mit verhältnissmässig grossem Werthe von n greifen muss, um die fragliche Neigung genügend zu verhindern.

Auch die gegenüber gewissen Theilen der Baukonstruktionen — wie z. B. gegenüber den durch Druck in Anspruch genommenen Brückenstäben, bei welchen die Gefahr der Knickung, d. h. der seitlichen Ausbiegung, besteht u. s. w. — oft ohne Weiteres gemachte Unterstellung, dass der Stab beiderseits als fest eingespannt

[1]) Bei den Spannungsverbindungen des Maschinenbaues ist eine solche Pressung stets vorhanden (s. des Verfassers Maschinenelemente 1881, S. 39, 1891 92, S. 77).

zu betrachten sei, erweist sich bei genauer Prüfung ziemlich häufig als unzutreffend.

Am nächsten kommt dem Zustande der vollkommenen Einspannung ein ausser an den Enden auch noch in der Mitte so gelagerter und entsprechend belasteter Träger, dass die ursprünglich

Fig. 163.

gerade Stabachse Tangente an der elastischen Linie im Querschnitt der Mittelstütze ist. Letzterer Querschnitt — bei *B*, Fig. 163 — kann dann als Einspannstelle betrachtet werden.

Fünfter Abschnitt.

Stabförmige Körper mit gekrümmter Mittellinie.

I. Die Mittellinie ist eine einfach gekrümmte Kurve, ihre Ebene Ort der einen Hauptachse sämmtlicher Stabquerschnitte, sowie der Richtungslinien der äusseren Kräfte.

Die den Stab belastenden Kräfte ergeben dann für einen beliebigen Querschnitt im Allgemeinen

1. eine im Schwerpunkte des Letzteren angreifende Kraft R, welche zerlegt werden kann
   a) in eine tangential zur Mittellinie, also senkrecht zum Querschnitt gerichtete Kraft P (Normalkraft), und
   b) in eine in den Querschnitt fallende Kraft S (Schubkraft),
2. ein auf Biegung wirkendes Kräftepaar vom Moment M_b.

§ 54. Dehnung. Spannung. Krümmungshalbmesser.

In dem gekrümmten stabförmigen Körper denken wir uns zwei unendlich nahe gelegene Querschnitte $C_1 O_1 C_1$ und $C_2 O_2 C_2$, Fig. 164. Dieselben begrenzen das Stabelement $C_1 O_1 C_1 C C_2 O_2 C_2 C$ und schneiden sich in der Krümmungsachse M. Der folgenden Betrachtung unterwerfen wir nur die Hälfte $C O C C C_1 O_1 C_1$ und fassen hierbei die Bogenelemente $C C_1$, $O O_1$ und $C C_1$ als gerade Linien auf, wie durch Fig. 165 in grösserem Massstabe dargestellt ist.

Es bezeichne nun unter Bezugnahme auf Fig. 165:

f den Querschnitt $C\,O\,C$ allgemein und dessen Grösse im Besonderen,

f_1 den Querschnitt $C_1\,O_1\,C_1$ allgemein und dessen Grösse im Besonderen,

O den Schwerpunkt von f,

O_1 denjenigen von f_1,

$r = \overline{MO}$ den Krümmungshalbmesser im Punkte O der Mittellinie vor Eintritt der Formänderung,

$d\varphi = \sphericalangle\, OMO_1$ den Winkel, welchen die Ebenen der beiden Querschnitte f und f_1 vor der Formänderung mit einander einschliessen,

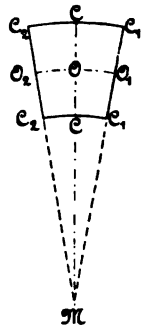


Fig. 164.

$ds = r\,d\varphi$ die Länge des Bogenelementes $\overline{O\,O_1}$ der Mittellinie im ursprünglichen Zustande,

$\overline{P\,P_1} = ds_1 = (r + \eta)\,d\varphi = r\,d\varphi + \eta\,d\varphi = ds + \eta\,d\varphi$ die Entfernung zweier in den Querschnitten f und f_1 gleich gelegenen, um η von der Mittellinie abstehenden Punkte, bevor die äusseren Kräfte auf den Stab wirken; wobei der Abstand η als positiv gilt, wenn er von O aus in der Richtung $\overline{MO}$ zu messen ist, negativ dagegen, wenn er in der Richtung OM, d. h. nach der Krümmungsachse hin liegt,

e_1 den grössten positiven Werth von η,

e_2 den grössten negativen Werth von η,

$e = e_1 = e_2$, falls der Querschnitt so beschaffen ist, dass beide Abstände gleich gross sind,

$\Theta = \int \eta^2 df$ das Trägheitsmoment des Querschnitts f in Bezug auf die in O sich projicirende Hauptachse.

Ferner sei

P die Normalkraft im Punkte O des Querschnitts f, positiv oder negativ, je nachdem sie ziehend oder drückend thätig ist,

M_b das für den Querschnitt f sich ergebende, auf Biegung wirkende Moment, positiv, wenn es eine Vermehrung der Krümmung, also eine Verkleinerung des Krümmungshalbmessers herbeiführt, negativ, wenn das Entgegengesetzte der Fall ist,

$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha}$ (§ 2) die durch P und M_b im Abstande η (von der in O sich projicirenden Hauptachse des Querschnittes f) hervorgerufene Spannung, entsprechend der daselbst eingetretenen Dehnung ε,

k_z, k, k_b die zulässige Anstrengung des Materials gegenüber Zug, bezw. Druck, bezw. Biegung,

ε_0 die Dehnung der Mittellinie im Punkte O, d. i. $\frac{\Delta ds}{ds}$, sofern sich das Bogenelement ds unter Einwirkung der äusseren Kräfte um Δds verlängert,

ω die verhältnissmässige Aenderung des Winkels $d\varphi$ der beiden Querschnitte, d. i. $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$, wenn der Winkel $d\varphi$ infolge der Formänderung in $d\varphi + \Delta d\varphi$ übergeht, also um $\Delta d\varphi$ sich ändert,

ϱ der Krümmungshalbmesser im Punkte O der Mittellinie während der Formänderung.

I. Anstrengung des Materials.

Die Normalkraft P wirke allein.

Hätte der Stab eine gerade Achse, so wären die beiden Querschnitte f und f_1 parallel; die Normalkraft P würde bei gleich-

mässiger Vertheilung über den Querschnitt sämmtliche dazwischen gelegenen Fasern wegen der Gleichheit ihrer Länge um gleichviel dehnen: es ändert sich nur die Entfernung der beiden Querschnitte, nicht aber ihre Neigung zu einander, dieselbe bleibt Null.

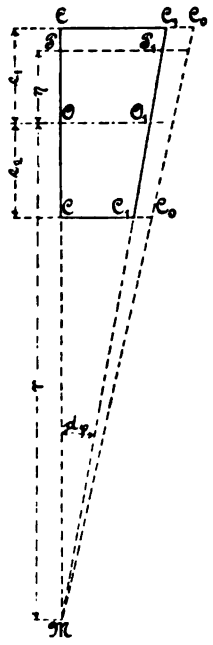


Fig. 165.

Anders verhält sich das Körperelement, Fig. 165. Hier sind die Fasern zwischen den beiden Querschnitten ungleich gross und zwar um so länger, je weiter sie von der Krümmungsachse abstehen. Bei gleichmässiger Vertheilung von P über den Querschnitt muss die Spannung σ in allen Querschnittspunkten gleich gross sein; infolge dessen müssen sich die längeren Fasern, absolut genommen, mehr dehnen als die kürzeren und zwar genau in dem Verhältniss, in welchem sie grösser sind, d. h. die Verlängerungen müssen sich verhalten wie die Abstände der Fasern von der Krümmungsachse M. Daraus folgt, dass die Ebene des Querschnitts, von dem angenommen wird, dass er eben bleibt, in ihrer neuen Lage $C_0'C_0$ die Krümmungsachse M schneidet, wie in Fig. 165 angedeutet ist. Wir erkennen: unter alleiniger Einwirkung der über den Querschnitt sich gleichmässig vertheilenden Normalkraft P ändert sich die Neigung desselben derart, dass seine Ebene die bisherige Krümmungsachse schneidet, dass also der Krümmungshalbmesser derselbe bleibt.

Normalkraft P und biegendes Kräftepaar vom Moment M_b sind vorhanden.

Wie soeben erörtert, führt die Normalkraft P den Querschnitt f_1 in die Lage $C_0'C_0$, Fig. 166, über. Beginnt nun jetzt das Moment M_b zu wirken, so wird der Querschnitt f_1 aus der Lage $C_0'C_0$ in eine andere, etwa $C_1''O_1C_1''$ gelangen, und die Krümmungsachse von M nach M' rücken, entsprechend einer Verkürzung des Krümmungshalbmessers von r auf ϱ, sowie einer Vergrösserung des

Querschnittswinkels $d\varphi$ auf $d\varphi + \Delta\, d\varphi$. Hierbei erfährt das Bogenelement $\overline{O\,O_1} = ds$ der Mittellinie die gesammte Dehnung

$$\varepsilon_0 = \frac{\Delta\, ds}{ds} = \frac{\overline{O_1\,O'_1}}{\overline{O\,O_1}},$$

während diejenige der im Abstande η gelegenen Faserschicht $P\,P_1$ aus der Verlängerung $\overline{P_1P'_1}$ zu bestimmen ist. Wird durch O'_1 die Gerade $O'_1N \parallel$ zu C_1C_1 gezogen, so findet sich

$$\overline{P_1P'_1} = \overline{P_1N} + \overline{NP'_1} = \overline{O_1O'_1} + \overline{NP'_1}$$

$$= \varepsilon_0\, ds + \eta \text{ arc } NO'_1P'_1 = \varepsilon_0\, r\, d\varphi + \eta\, \Delta\, d\varphi;$$

hiermit die Dehnung ε im Abstande η

$$\varepsilon = \frac{\overline{P_1P'_1}}{\overline{PP_1}} = \frac{\varepsilon_0\, r\, d\varphi + \eta\, \Delta\, d\varphi}{(r+\eta)\, d\varphi}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 + \dfrac{\eta}{r}\dfrac{\Delta\, d\varphi}{d\varphi}}{1 + \dfrac{\eta}{r}},$$

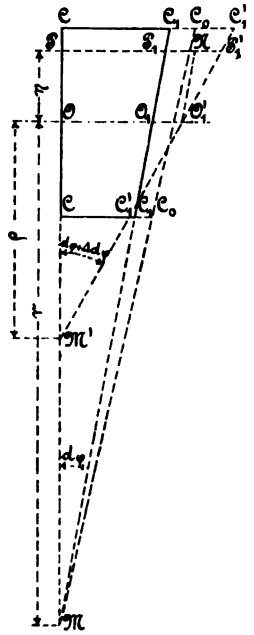


Fig. 166.

unter Beachtung, dass

$$\frac{\Delta\, d\varphi}{d\varphi} = \omega,$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + (\omega - \varepsilon_0)\frac{\dfrac{\eta}{r}}{1 + \dfrac{\eta}{r}}, \quad \ldots \quad 203)$$

und die zugehörige Spannung, sofern Kräfte senkrecht zur Stabachse nicht einwirken,

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha} = \left[\varepsilon_0 + (\omega - \varepsilon_0)\frac{\eta}{r+\eta}\right]\frac{1}{\alpha}. \quad \ldots \quad 204)$$

Die im Innern des Stabes wachgerufenen Kräfte müssen sich mit den äusseren im Gleichgewicht befinden, d. h. (§ 16, Gl. 35 und Gl. 38)

$$\int \sigma\, df = P = \int \frac{1}{\alpha}\left[\varepsilon_0 + (\omega - \varepsilon_0)\frac{\eta}{r+\eta}\right] df, \quad . \quad 205)$$

$$\int \sigma\, df\,.\,\eta = M_b = \int \frac{1}{\alpha}\,\eta\left[\varepsilon_0 + (\omega - \varepsilon_0)\frac{\eta}{r+\eta}\right] df. \quad 206)$$

Unter Voraussetzung, dass der Dehnungskoefficient α konstant ist, folgt

$$P = \frac{1}{\alpha}\left[\varepsilon_0 \int df + (\omega - \varepsilon_0)\int \frac{\eta}{r+\eta}\, df\right],$$

$$M_b = \frac{1}{\alpha}\left[\varepsilon_0 \int \eta\, df + (\omega - \varepsilon_0)\int \frac{\eta^2}{r+\eta}\, df\right].$$

Mit

$$\int df = f, \qquad \int \eta\, df = 0,$$

$$\int \frac{\eta}{r+\eta}\, df = -\varkappa f, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 207)$$

$$\int \frac{\eta^2}{r+\eta} df = \int \left(\eta - r\frac{\eta}{r+\eta}\right) df = -r\int \frac{\eta}{r+\eta} df = \varkappa f r \quad 208)$$

wird

$$P = \frac{f}{\alpha}\left[\varepsilon_0 - (\omega - \varepsilon_0)\,\varkappa\right],$$

$$M_b = \frac{f}{\alpha}\,(\omega - \varepsilon_0)\,\varkappa\, r,$$

woraus

$$\left.\begin{aligned} \omega - \varepsilon_0 &= \alpha\frac{M_b}{\varkappa f r} \\ \varepsilon_0 = \alpha\frac{P}{f} + (\omega - \varepsilon_0)\,\varkappa &= \frac{\alpha}{f}\left(P + \frac{M_b}{r}\right) \\ \omega = \varepsilon_0 + \alpha\frac{M_b}{\varkappa f r} &= \frac{\alpha}{f}\left(P + \frac{M_b}{r} + \frac{M_b}{\varkappa r}\right). \end{aligned}\right\} \quad 209)$$

Hiermit liefert Gl. 204

$$\sigma = \frac{P}{f} + \frac{M_b}{fr} + \frac{M_b}{\varkappa f r} \frac{\eta}{r + \eta}. \quad . \quad . \quad . \quad 210)$$

Handelt es sich um ein Material, für welches die zulässige Anstrengung gegenüber Biegung, d. i. k_b, erheblich abweicht von derjenigen gegenüber Zug k_z, so ist das in § 45, Ziff. 1 hierüber Bemerkte zu beachten. Die hier in Betracht kommenden Verhältnisse sind allerdings weniger einfach und erscheinen deshalb der weiteren Klarstellung durch Versuche dringend bedürftig. (Vergl. in dieser Hinsicht die Versuchsergebnisse in § 56.)

Wenn

$$P = 0,$$

so wird

$$\sigma = \frac{M_b}{fr} + \frac{M_b}{\varkappa f r} \frac{\eta}{r + \eta}$$

und für $\eta = 0$

$$\sigma = \frac{M_b}{fr}.$$

Bei dem geraden Stab ergiebt sich nach Gl. 42 für $\eta = 0$

$$\sigma = 0,$$

d. h. während bei dem nur durch M_b belasteten Stabe mit gerader Achse die Normalspannungen in der zur Ebene des Kräftepaares senkrechten Hauptachse des Querschnittes Null sind, herrscht bei dem gekrümmten, auch nur durch M_b belasteten Stabe in dieser Linie die Spannung $M_b : fr$. Die bezeichnete Hauptachse ist demnach hier nicht Nullachse.

Der Grund für dieses abweichende Verhalten liegt einfach darin, dass bei dem gekrümmten Stab die zwischen zwei Querschnitten gelegenen Fasern verschiedene Länge besitzen, während bei dem geraden Stab Gleichheit besteht. (Vergl. das zu Anfang von Ziff. 1 Erörterte.)

Entsteht M_b dadurch, dass eine Last Q senkrecht zu dem in Betracht gezogenen Querschnitt im Abstande r von dem Schwerpunkt desselben ziehend angreift, also durch den Krümmungsmittelpunkt der Stabachse geht, dabei auf Verminderung der Krümmung hinwirkt, so ist wegen

$$P = Q, \qquad M_b = -Qr$$

nach Gl. 210

$$\sigma = \frac{Q}{f} - \frac{Qr}{fr} - \frac{Qr}{\varkappa f r}\frac{\eta}{r+\eta} = -\frac{Q}{\varkappa f}\frac{\eta}{r+\eta} = \frac{M_b}{\varkappa f r}\frac{\eta}{r+\eta}. \quad 211)$$

Für $\eta = 0$ ergiebt sich hieraus $\sigma = 0$, obgleich eine Normalkraft vorhanden ist.

Nach Gl. 208 ist

$$\int \frac{\eta^2}{r+\eta}\,df = \varkappa f r.$$

Folglich auch

$$\int \frac{\eta^2}{1+\frac{\eta}{r}}\,df = \varkappa f r^2.$$

Wenn nun r sehr gross ist gegenüber η, d. h. gegenüber der Abmessung des Querschnittes in Richtung von r, so geht dieser Ausdruck — streng genommen nur für $r = \infty$ — über in

$$\varkappa f r^2 = \int \frac{\eta^2}{1+\frac{\eta}{r}}\,df = \sim \int \eta^2\,df = \Theta^1),$$

woraus

$$\varkappa = \frac{\Theta}{f r^2}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 212)^1)$$

---

[1]) Zur Beurtheilung, für welche Werthe von r — im Verhältniss zu den Querschnittsabmessungen in Richtung von r — diese Annäherungsgleichung benutzt werden kann, sei Folgendes bemerkt.

Es ist für den rechteckigen Querschnitt (vergl. Ziff. 2, a) nach Gl. 214, da $\Theta = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{2}{3} b e^3$,

Die Einsetzung dieses Werthes in Gl. 210 führt zu

$$\sigma = \frac{P}{f} + \frac{M_b}{f r} + \frac{M_b}{\Theta} \frac{\eta}{1 + \frac{\eta}{r}} \quad . \quad . \quad . \quad 210\text{a})$$

und ergiebt mit $r = \infty$

$$\sigma = \frac{P}{f} + \frac{M_b}{\Theta} \eta,$$

d. i. die für gerade Stäbe giltige Gleichung 157.

$$\frac{\varkappa f r^2}{\Theta} = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{e}{r}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{e}{r}\right)^4 + \frac{1}{7}\left(\frac{e}{r}\right)^6 + \ldots.\right] \cdot 3\left(\frac{r}{e}\right)^2 =$$

$$= 1 + \frac{3}{5}\left(\frac{e}{r}\right)^2 + \frac{3}{7}\left(\frac{e}{r}\right)^4 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{3}{5}\left(\frac{h}{2r}\right)^2 + \frac{3}{7}\left(\frac{h}{2r}\right)^4 + \ldots,$$

somit

für	r	=	h	$2h$	$3h$	$4h$
	$\frac{\varkappa f r^2}{\Theta}$	=	1,18	1,04	1,02	1,01.

Im Falle kreisförmigen oder elliptischen Querschnitts (vergl. Ziff. 2, b) ergiebt sich nach Gl. 216

$$\frac{\varkappa f r^2}{\Theta} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{e}{r}\right)^2 + \frac{5}{16}\left(\frac{e}{r}\right)^4 + \ldots,$$

folglich

für	r	=	$2e$	$4e$	$6e$	$8e$
	$\frac{\varkappa f r^2}{\Theta}$	=	1,15	1,03	1,02	1,01.

Hiernach liefert die Gleichung 210 a gegenüber der Gleichung 210 das dritte Glied der rechten Seite zu gross und zwar beispielsweise bei elliptischem Querschnitt nach Massgabe der Zahlen 1,15, 1,03 u. s. w. Wird in diesem Gliede noch der Quotient $\eta : r$ vernachlässigt, also dasselbe $\frac{M_b}{\Theta}\eta$ gesetzt, wie es sich für gerade stabförmige Körper ergiebt, so kann dagegen sein Werth erheblich zu klein ausfallen, wie die Zahlen der nachstehenden Betrachtung erkennen lassen.

Soll die Anstrengung durch die Schubkraft S, welche sich nach dem oben unmittelbar zu I unter Ziffer 1 b Bemerkten ergiebt, ermittelt werden, so kann das mit Annäherung derart geschehen, wie in § 39 beim geraden stabförmigen Körper; nur ist dabei zu berücksichtigen, dass das Gesetz, nach welchem sich hier σ ändert, ein anderes ist.

Für den kreisförmigen Querschnitt A des ringförmigen Körpers Fig. 167

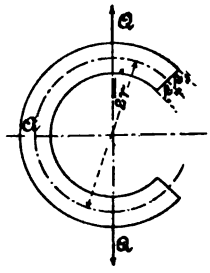


Fig. 167.

beträgt $M_b = -Qr$ und somit der Werth des dritten Gliedes in Gl. 210 mit $\eta = -e$ (d. i. für den innersten Punkt)

$$-\frac{Qr}{\Theta}\,\frac{-e}{1-\frac{e}{r}}\,\frac{\Theta}{x f r^2} = \frac{Qr}{\Theta}\,\frac{e}{1-\frac{e}{r}}\,\frac{\Theta}{x f r^2},$$

welche Grösse

für $r =$	$2e$	$4e$	$6e$	$8e$
ergiebt	$\frac{Qr}{\Theta}\,\frac{2}{1{,}15}\,e$	$\frac{Qr}{\Theta}\,\frac{4}{3\cdot 1{,}03}\,e$	$\frac{Qr}{\Theta}\,\frac{6}{5\cdot 1{,}02}\,e$	$\frac{Qr}{\Theta}\,\frac{8}{7\cdot 1{,}01}\,e$
	$= 1{,}74\,\frac{Qr}{\Theta}\,e,$	$= 1{,}29\,\frac{Qr}{\Theta}\,e,$	$= 1{,}18\,\frac{Qr}{\Theta}\,e,$	$= 1{,}13\,\frac{Qr}{\Theta}\,e,$
d. i.	74 %	29 %	18 %	13 %

mehr als der Ausdruck $\frac{M_b}{\Theta}\,\eta$, giltig für gerade stabförmige Körper, mit dem grössten Werthe von η liefert.

Die resultirende Spannung σ würde unter Zugrundelegung dieser Zahlen betragen

Grashof (Theorie der Elasticität und Festigkeit, Berlin 1878, S. 283 u. f.) gelangt auf diesem Wege zu der Gleichung

$$\tau = \frac{S}{2\,y\,.\,\varkappa f\,(r \pm \eta)^2 \cos\varphi'} \int_{\eta}^{e} \eta\, df = \frac{S\,M_\eta}{2\,y\,\varkappa f\,(r \pm \eta)^2 \cos\varphi'},$$

welche unter Bezugnahme auf Fig. 126 an die Stelle der Beziehung 134

$$\tau = \frac{S\,M_\eta}{2y\,\Theta \cos\varphi'}$$

tritt.

2. Werthe von $\varkappa = -\frac{1}{f}\int \frac{\eta}{r+\eta}\,df.$

a) Rechteckiger Querschnitt.

Mit b als Breite und h als Höhe, sodass

$$f = b\,h, \qquad df = b\,d\eta,$$

ergiebt sich

bei $r =$	$2e$	$4e$	$6e$	$8e$
für gekrümmte stabförmige Körper $\sigma =$	$8 \cdot 1{,}74\,\frac{Q}{f}$	$16 \cdot 1{,}29\,\frac{Q}{f}$	$24 \cdot 1{,}18\,\frac{Q}{f}$	$32 \cdot 1{,}13\,\frac{Q}{f}$
	$= 13{,}92\,\frac{Q}{f}$,	$= 20{,}64\,\frac{Q}{f}$,	$= 28{,}32\,\frac{Q}{f}$,	$= 36{,}16\,\frac{Q}{f}$.
Für gerade stabförmige Körper wird sein $\sigma = \frac{Q}{f} + \frac{Q\,r}{\Theta}\,e =$	$9{,}0\,\frac{Q}{f}$,	$17\,\frac{Q}{f}$,	$25\,\frac{Q}{f}$,	$33\,\frac{Q}{f}$.

$$x = -\frac{1}{b\,h}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\eta}{r+\eta}\,b\,d\eta = -\frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(1-\frac{r}{r+\eta}\right) d\eta,$$

$$x = -1 + \frac{r}{h}\,ln\,\frac{r+\frac{h}{2}}{r-\frac{h}{2}}. \quad . \quad . \quad . \quad 213)$$

Wird

$$\frac{h}{2} = e$$

gesetzt, so folgt

$$ln\,\frac{r+\frac{h}{2}}{r-\frac{h}{2}} = ln\,\frac{1+\frac{e}{r}}{1-\frac{e}{r}},$$

und unter Voraussetzung, dass $r > e$

$$ln\,\frac{1+\frac{e}{r}}{1-\frac{e}{r}} = 2\left[\frac{e}{r} + \frac{1}{3}\left(\frac{e}{r}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{e}{r}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{e}{r}\right)^7 + \ldots.\right],$$

womit

$$x = \frac{1}{3}\left(\frac{e}{r}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{e}{r}\right)^4 + \frac{1}{7}\left(\frac{e}{r}\right)^6 + \ldots.. \quad . \quad 214)$$

b) Kreisquerschnitt. Elliptischer Querschnitt.

Zum Zwecke der Entwicklung in eine unendliche Reihe werde gesetzt

$$x = -\frac{1}{f\,r}\int \frac{1}{1+\frac{\eta}{r}}\,\eta\,df$$

$$= -\frac{1}{f r}\int\left(1-\frac{\eta}{r}+\frac{\eta^2}{r^2}-\frac{\eta^3}{r^3}+\frac{\eta^4}{r^4}-\frac{\eta^5}{r^5}+\frac{\eta^6}{r^6}\ldots.\right)\eta\,df$$

$$= -\frac{1}{f r}\left(-\frac{1}{r}\int\eta^2\,df+\frac{1}{r^2}\int\eta^3\,df-\frac{1}{r^3}\int\eta^4\,df+\ldots\right),$$

$$\varkappa = +\frac{1}{f}\left(\frac{1}{r^2}\int\eta^2\,df-\frac{1}{r^3}\int\eta^3\,df+\frac{1}{r^4}\int\eta^4\,df\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r^5}\int\eta^5\,df+\ldots\right). \quad \ldots\ldots \quad 215)$$

Für den Kreis wird infolge der Symmetrie

$$\int\eta^3\,df=0 \qquad \int\eta^5\,df=0$$

u. s. f.

Ferner gilt, Fig. 45, mit e als Halbmesser:

$$f=\pi e^2, \qquad \eta=e\sin\varphi, \qquad df=z\,d\eta=2\,e^2\cos^2\varphi\,d\varphi,$$

$$\int\eta^2 df=\frac{\pi}{4}e^4.$$

Damit findet sich

$$\int\eta^4 df=4\,e^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{8}e^6,$$

$$\int\eta^6 df=4\,e^8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{5}{64}\pi e^8,$$

sodass

$$\varkappa=\frac{1}{\pi e^2}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\pi}{4}e^4+\frac{1}{r^4}\frac{\pi}{8}e^6+\frac{1}{r^6}\frac{5}{64}\pi e^8+\ldots\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{e}{r}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{e}{r}\right)^4+\frac{5}{64}\left(\frac{e}{r}\right)^6+\ldots \quad \ldots \quad 216)$$

Derselbe Werth ergiebt sich für den elliptischen Querschnitt, sofern e diejenige Halbachse der Ellipse ist, welche in die Ebene der Mittellinie des Stabes fällt.

c) Trapezförmiger Querschnitt mit Symmetrielinie.

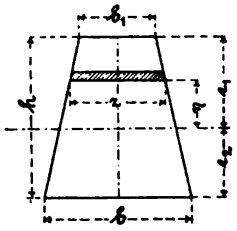


Fig. 168.

Aus Fig. 168 folgt unmittelbar

$$f = \frac{b + b_1}{2} h, \qquad df = z\, d\eta,$$

$$z = b_1 + \frac{b - b_1}{h} (e_1 - \eta),$$

$$df = \left(b_1 + \frac{b - b_1}{h} e_1 - \frac{b - b_1}{h} \eta \right) d\eta.$$

Wegen

$$x = -\frac{1}{f} \int \left(1 - \frac{r}{r + \eta} \right) df = -1 + \frac{r}{f} \int \frac{df}{r + \eta}$$

ist zunächst dieses Integral festzustellen.

$$\int \frac{df}{r + \eta} = \left(b_1 + \frac{b - b_1}{h} e_1 \right) \int_{-e_2}^{+e_1} \frac{d\eta}{r + \eta} - \frac{b - b_1}{h} \int_{-e_2}^{+e_1} \frac{\eta\, d\eta}{r + \eta}.$$

Da

$$\int_{-e_2}^{+e_1} \frac{\eta\, d\eta}{r + \eta} = \int_{-e_2}^{+e_1} \left(1 - \frac{r}{r + \eta} \right) d\eta = e_1 + e_2 - r \ln \frac{r + e_1}{r - e_2},$$

so folgt

$$\int_e \frac{df}{r+\eta} = \left(b_1 + \frac{b-b_1}{h} e_1\right) ln \frac{r+e_1}{r-e_2} - \frac{b-b_1}{h} \left(e_1 + e_2 - r\, ln \frac{r+e_1}{r-e_2}\right)$$

$$= \left[b_1 + \frac{b-b_1}{h}(e_1+r)\right] ln \frac{r+e_1}{r-e_2} - (b-b_1),$$

$$x = -1 + \frac{2r}{(b+b_1)h} \left\{ \left[b_1 + \frac{b-b_1}{h}(e_1+r)\right] ln \frac{r+e_1}{r-e_2} - (b-b_1) \right\}. \quad 217)$$

d) Querschnitt des gleichschenkligen Dreiecks.

Aus Gl. 217 folgt für

$$b_1 = 0, \qquad e_1 = \frac{2}{3} h, \qquad e_2 = \frac{1}{3} h,$$

$$x = -1 + \frac{2r}{h} \left[\left(\frac{2}{3} + \frac{r}{h}\right) ln \frac{1 + \frac{2}{3}\frac{h}{r}}{1 - \frac{1}{3}\frac{h}{r}} - 1 \right]. \quad 218)$$

e) Für zusammengesetzte Querschnitte oder solche, bei deren Behandlung die Integration Schwierigkeiten bietet,

empfiehlt sich die Bestimmung von x in der Weise, dass der Querschnitt in eine genügende Anzahl Streifen zerlegt wird, welche senkrecht zur Ebene der Mittellinie stehen, so wie dies z. B. Fig. 48 für eine Eisenbahnschiene angiebt.

Ist $\triangle f$ der Flächeninhalt eines solchen Streifens, η sein Abstand von der Mittellinie (positiv oder negativ, je nachdem er von der Krümmungsachse M weg oder nach derselben zu gelegen ist), so sind für alle Streifen die Werthe

$$\frac{\eta}{r+\eta} \triangle f$$

zu bilden, hierauf ist deren algebraische Summe zu bestimmen und diese schliesslich durch $-f$ zu dividiren. Das Ergebniss ist der gesuchte Werth von x.

3. Krümmungshalbmesser.

An der Hand der Fig. 166 erkannten wir, dass der Querschnittswinkel $d\varphi$ und der Krümmungshalbmesser r unter der Einwirkung von P und M_b in $d\varphi + \triangle d\varphi$, bezw. ϱ übergingen. Während für das Bogenelement der Mittellinie vor der Formänderung die Beziehung

$$\overline{O\,O_1} = ds = r\,d\varphi$$

galt, ergiebt sich für dasselbe während der Dauer der Formänderung

$$\overline{O\,O_1'} = ds + \triangle ds = \varrho\,(d\varphi + \triangle d\varphi),$$

woraus nach Division mit ds, bezw. $r\,d\varphi$

$$1 + \frac{\triangle ds}{ds} = \frac{\varrho}{r}\left(1 + \frac{\triangle d\varphi}{d\varphi}\right),$$

$$1 + \varepsilon_0 = \frac{\varrho}{r}\,(1 + \omega),$$

und hieraus unter Beachtung der Gl. 209

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{1+\omega}{1+\varepsilon_0} = 1 + \frac{\omega - \varepsilon_0}{1+\varepsilon_0} = 1 + \frac{M_b}{\varkappa r\left(\frac{f}{\alpha} + P + \frac{M_b}{r}\right)}$$

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r} + \frac{M_b}{\varkappa r^2\left(\frac{f}{\alpha} + P + \frac{M_b}{r}\right)}. \quad \ldots \quad 219)$$

Wird berücksichtigt, dass ε_0 eine sehr kleine Grösse ist, so kann mit genügender Annäherung in der Regel gesetzt werden

$$\frac{r}{\varrho} = 1 + \frac{\omega - \varepsilon_0}{1+\varepsilon_0} = \sim 1 + \omega - \varepsilon_0,$$

woraus bei Ersatz von $\omega - \varepsilon_0$ nach Massgabe der ersten der Gleichungen 209 folgt

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r} + \alpha \frac{M_b}{\varkappa f r^2}.$$

Wenn die Querschnittsabmessungen so klein sind gegenüber r, dass von der Gl. 212, nach welcher

$$\varkappa f r^2 = \Theta,$$

Gebrauch gemacht werden darf, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\varrho} &= \frac{1}{r} + \alpha \frac{M_b}{\Theta}, \\ \text{oder} \qquad M_b &= \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r}\right) \frac{\Theta}{\alpha} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 220)^1)$$

[1]) Diese Annäherungsgleichung wird nicht selten aus der für gerade stabförmige Körper giltigen Beziehung Gl. 40 in der Weise abgeleitet, dass man die ursprüngliche Krümmung mit dem Halbmesser r auffasst als herbeigeführt durch ein Moment M_0, für das nach Gl. 40 gilt

$$\frac{1}{r} = \alpha \frac{M_0}{\Theta}.$$

Durch Hinzufügung des Momentes M_b gehe die Krümmung in eine solche mit dem Halbmesser ϱ über, somit

$$\frac{1}{\varrho} = \alpha \cdot \frac{M_0 + M_b}{\Theta}.$$

Wird der erstere Ausdruck von dem letzteren abgezogen, so findet sich

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r} = \alpha \frac{M_b}{\Theta} \quad \text{oder} \quad M_b = \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r}\right) \frac{\Theta}{\alpha},$$

wie oben angegeben.

Dass diese Vorstellungsweise voraussetzt, es bleibe die Beanspruchung des Stabes unter der Einwirkung von M_0 und M_b innerhalb der Proportionalitätsgrenze, springt sofort in die Augen, wie auch die Thatsache, dass diese Voraussetzung nicht in Uebereinstimmung mit der Wirklichkeit steht, die eben einen bereits bleibend gebogenen Stab der Biegung durch M_b darbietet. Trotz des hierin liegenden Fehlers gewährt diese Ableitungsweise, nachdem der Ausdruck 220 als Annäherungsgleichung auf strengerem Wege ermittelt worden ist, ein bequemes Mittel, um sich die Letztere rasch jeder Zeit aus dem Kopfe herstellen zu können, lediglich auf Grund der für gerade stabförmige Körper giltigen Gleichung 40.

4. Aenderung der Koordinaten der Mittellinie.

In Fig. 169 sei $APCD$ die Mittellinie des gekrümmten Stabes vor der Einwirkung der äusseren Kräfte. Dieselbe werde auf ein

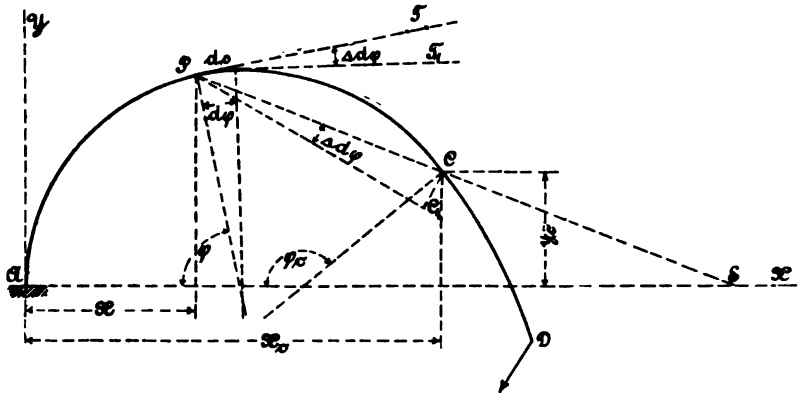


Fig. 169.

rechtwinkliges, in ihrer Ebene derart gelegenes Koordinatensystem AX und AY bezogen, dass AX die Normale und AY die Tangente im Punkte A ist. Unter Einwirkung der äusseren Kräfte, welche wir uns etwa durch eine im Punkte D angreifende Kraft ersetzt denken wollen, ändert sich die Form der Mittellinie und damit auch die Grösse der Koordinaten x_c und y_c des Punktes C derselben. Diese Koordinatenänderungen seien mit $\triangle x_c$ und $\triangle y_c$ bezeichnet, entsprechend einem Uebergange von x_c und y_c in $x_c + \triangle x_c$, bezw. $y_c + \triangle y_c$.

Zum Zwecke der Ermittlung von $\triangle x_c$ und $\triangle y_c$ greifen wir einen beliebigen Punkt P mit den Koordinaten x und y heraus; der Krümmungshalbmesser der Mittellinie betrage hier r. Das zugehörige Bogenelement, welches in die Richtung der Tangente PT fällt, habe die Länge $ds = r\,d\varphi$, sofern $d\varphi$ den zugehörigen Centriwinkel bezeichnet.

Infolge Einwirkung der äusseren Kräfte wird sich das Bogenelement ds — den Punkt P denken wir uns hierbei fest — um P drehen: PT gelangt in die Richtung PT_1, $d\varphi$ ändert sich um $\triangle d\varphi = \omega\,d\varphi$ (nach § 54). Ausserdem wird ds eine Verlängerung um $\varepsilon_0\,ds$ erfahren.

Die Drehung von ds um $\triangle d\varphi$ hat zur Folge, dass der Punkt C auf dem Kreisbogen $\overset{\frown}{CC_1} = \overline{PC} \cdot \triangle d\varphi$ nach C_1 rückt. Hierdurch ändert sich die Abscisse des Punktes C um

$$-(\overline{PC} \cdot \triangle d\varphi) \sin CEA = -\overline{PC} \sin CEA \cdot \triangle d\varphi = -(y - y_c) \triangle d\varphi$$

und die Ordinate um

$$-(\overline{PC} \cdot \triangle d\varphi) \cos CEA = -\overline{PC} \cos CEA \cdot \triangle d\varphi = -(x_c - x) \triangle d\varphi.$$

Aus Anlass der Verlängerung von ds um $\varepsilon_0 ds$ bewegt sich der Punkt C um $\varepsilon_0 ds$ in der Richtung von ds, d. h. in der Richtung der Tangente AT vorwärts. Dadurch erfährt die Abscisse von C eine Zunahme um

$$\varepsilon_0 ds \sin \varphi = \varepsilon_0 dx$$

und die Ordinate eine solche im Betrage von

$$\varepsilon_0 ds \cos \varphi = \varepsilon_0 dy.$$

Demnach die Zunahme der Koordinaten x_c und y_c, veranlasst durch die Aenderung der Richtung und durch die Aenderung der Länge des Bogenelementes ds allein

$$d(\triangle x_c) = -(y - y_c) \triangle d\varphi + \varepsilon_0 dx = y_c \omega d\varphi - y \omega d\varphi + \varepsilon_0 dx,$$

$$d(\triangle y_c) = -(x_c - x) \triangle d\varphi + \varepsilon_0 dy = -x_c \omega d\varphi + x \omega d\varphi + \varepsilon_0 dy,$$

und somit die gesammte Zunahme der Koordinaten x_c und y_c, herbeigeführt durch die entsprechenden Aenderungen aller zwischen A und C gelegenen Bogenelemente

$$\left.\begin{aligned} \triangle x_c &= y_c \int_0^{\varphi_c} \omega d\varphi - \int_0^{\varphi_c} y \omega d\varphi + \int_0^{x_c} \varepsilon_0 dx \\ \triangle y_c &= -x_c \int_0^{\varphi_c} \omega d\varphi + \int_0^{\varphi_c} x \omega d\varphi + \int_0^{y_c} \varepsilon_0 dy \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 221)$$

Hierin sind ω und ε_0 durch die Gl. 209 bestimmt.

Für den Fall, dass die Querschnittsabmessungen senkrecht zur Mittellinie genügend klein gegenüber r sind, sodass von Gl. 212 Gebrauch gemacht und in der letzten der 3 Gleichungen 209 (rechte Seite) die Summe der beiden ersten Glieder, d. h. $P + \frac{M_b}{r}$, gegenüber dem letzten Gliede vernachlässigt werden darf, geht der Ausdruck für ω über in

$$\omega = \frac{\alpha}{f} \frac{M_b}{\varkappa r} = \sim \alpha \frac{M_b}{\Theta} r.$$

Hiermit ergeben sich aus den Beziehungen 221 die Annäherungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} \triangle x_c &= \alpha \left[y_c \int_0^{\varphi_c} \frac{M_b}{\Theta} r \, d\varphi - \int_0^{\varphi_c} y \frac{M_b}{\Theta} r \, d\varphi + \int_0^{x_c} \frac{P}{f} dx \right] \\ \triangle y_c &= \alpha \left[- x_c \int_0^{\varphi_c} \frac{M_b}{\Theta} r \, d\varphi + \int_0^{\varphi_c} x \frac{M_b}{\Theta} r \, d\varphi + \int_0^{y_c} \frac{P}{f} dy \right] \end{aligned}\right\}, \quad 222)$$

sofern bei Einführung von ε_0 aus der zweiten der Gleichungen 209 noch $\frac{M_b}{r}$ gegenüber P vernachlässigt wird. Bei verhältnissmässig grossem r tritt überhaupt der durch das dritte Glied der Gleichungen 221 und 222 gemessene Antheil der Formänderung der Mittellinie zurück gegenüber dem Betrage, welchen die Summen der beiden ersten Glieder liefern.

§ 55. Fälle bestimmter Belastungen.

1. Offener Haken trägt eine Last Q. Fig. 170.

Die Kraft Q ergiebt für den horizontalen trapezförmigen Querschnitt[1]) BOC das grösste Moment und die grösste Normalkraft. Nach Gl. 210 beträgt die Spannung im Abstande η von der Schwerlinie (OO im Grundriss) desselben

$$\sigma = \frac{P}{f} + \frac{M_b}{f r} + \frac{M_b}{\varkappa f r} \frac{\eta}{r+\eta}.$$

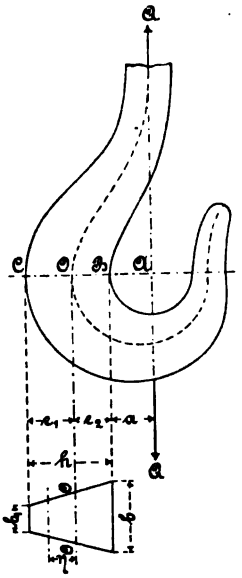


Fig. 170.

Hierin ist

$$P = Q, \qquad M_b = -Q(a+e_2),$$

$$f = \frac{b+b_1}{2} h,$$

und nach Gl. 217

$$\varkappa = -1 + \frac{2r}{(b+b_1)h}\left\{\left[b_1 + \frac{b-b_1}{h}(e_1+r)\right] ln \frac{r+e_1}{r-e_2} - (b-b_1)\right\}.$$

Für den Krümmungshalbmesser r der Mittellinie im Punkte O wird gewählt $r = a + e_2$, so dass A der Krümmungsmittelpunkt ist. Damit folgt dann wegen $e_1 + r = a + h$ und $r - e_2 = a$

$$\varkappa = -1 + \frac{2r}{(b+b_1)h}\left\{\left[b_1 + \frac{b-b_1}{h}(a+h)\right] ln \frac{a+h}{a} - (b-b_1)\right\}$$

$$= -1 + \frac{2r}{(b+b_1)h}\left\{\left[b\left(1+\frac{a}{h}\right) - b_1 \frac{a}{h}\right] ln\left(1+\frac{h}{a}\right) - (b-b_1)\right\},$$

[1]) In der Ausführung werden die scharfen Ecken des Trapezes abgerundet und die hiermit verknüpften Querschnittsverminderungen durch geringe Wölbung der ebenen Begrenzungsflächen des Trapezstabes ausgeglichen.

woraus für

$$h = 2\,a, \qquad b = 3\,b_1$$

wegen

$$e_2 = \frac{h}{3}\,\frac{b + 2\,b_1}{b + b_1} = \frac{h}{3}\,\frac{5\,b_1}{4\,b_1} = \frac{5}{12}\,h = \frac{5}{6}\,a,$$

$$r = a + e_2 = \frac{11}{6}\,a,$$

sich ergiebt

$$\varkappa = -1 + \frac{11}{24}\,(4\,ln\,3 - 2) = 0{,}0974,$$

$$\frac{1}{\varkappa} = 10{,}27.$$

Die Spannung beträgt unter Beachtung, dass

$$r = a + e_2 = \frac{11}{6}\,a,$$

$$\sigma = -10{,}27\,\frac{Q}{f}\,\frac{\eta}{\frac{11}{6}\,a + \eta}$$

und insbesondere

für $\eta = -e_2 = -\frac{5}{6}\,a$ $\quad \sigma = +8{,}56\,\frac{Q}{f}$ (im Punkte B)

„ $\eta = -\frac{3}{6}\,a$ $\quad \sigma = +3{,}85\,\frac{Q}{f}$

„ $\eta = 0$ $\quad \sigma = 0$ (vergl. auch Gl. 211)

„ $\eta = +\frac{3}{6}\,a$ $\quad \sigma = -2{,}20\,\frac{Q}{f}$

„ $\eta = +e_1 = +\frac{7}{6}\,a$ $\quad \sigma = -3{,}99\,\frac{Q}{f}$ (im Punkte C).

Die Darstellung dieser Spannungen in Fig. 171 derart, dass

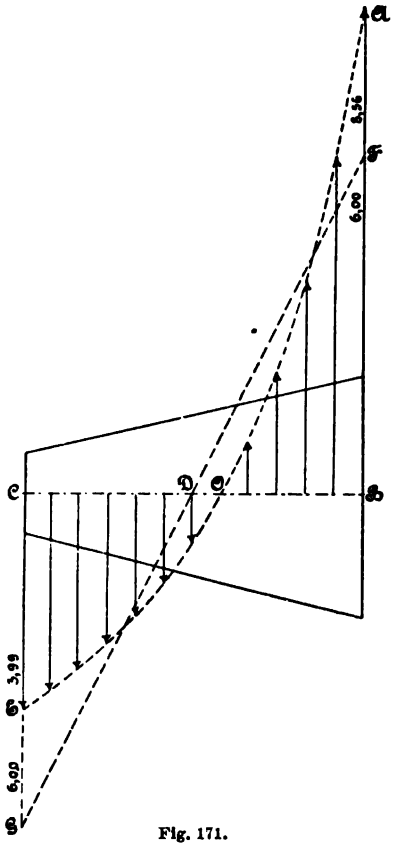


Fig. 171.

senkrecht zur Symmetrielinie des Trapezes die in dem betreffenden Punkte herrschende Spannung aufgetragen wird (beispielsweise in $B\ \overline{BA} = +\ 8{,}56\ \frac{Q}{f}$, in $C\ \overline{CE} = -\ 3{,}99\ \frac{Q}{f}$), ergiebt die Kurve $A\ O\ E$.

Wird der Querschnitt BOC — Fig. 170 — als einem geraden stabförmigen Körper angehörig betrachtet, so findet sich unter Beachtung der Spalte 11 der Zusammenstellung Ziff. 6 des § 17 wegen

$$\frac{\Theta}{e_2} = \frac{11}{30}\, b_1\, h^2 = \frac{11}{60} f\, h = \frac{11}{30}\, a f,$$

für die Spannung im Punkte B

$$\sigma = \frac{Q}{f} + \frac{Q\frac{11}{6}a}{\frac{\Theta}{e_2}} = \frac{Q}{f} + 5\frac{Q}{f} = +6\frac{Q}{f},$$

und für diejenige im Punkte C

$$\sigma = \frac{Q}{f} - \frac{Q\frac{11}{6}a}{\frac{\Theta}{e_1}} = \frac{Q}{f} - 7\frac{Q}{f} = -6\frac{Q}{f}.$$

Die Darstellung dieser Spannungen liefert die Gerade FDG. Wie ersichtlich, ergiebt die Unterstellung: der Querschnitt gehöre einem geraden stabförmigen Körper an, die massgebende Anstrengung im Punkt B um

$$100\,\frac{8{,}56 - 6}{8{,}56} = 30\,\%$$

zu klein, führt also zu einer erheblichen Unterschätzung der Inanspruchnahme. Ausserdem würde sie im vorliegenden Falle zu der Auffassung veranlassen, dass die Zuganstrengung in B gleich der Druckanstrengung in C sei, während thatsächlich die erstere $\left(8{,}56\frac{Q}{f}\right)$ um mehr als 100 % grösser ist als die letztere $\left(3{,}99\frac{Q}{f}\right)$.

Die Beanspruchung des Hakens im Querschnitt BOC wird sich um so mehr derjenigen eines geraden, excentrisch belasteten Stabes nähern, d. h. die Kurve AOE, Fig. 171, wird um so weniger von der Geraden FDG abweichen, je grösser der Krümmungshalbmesser r ist. Es ist deshalb angezeigt, den Krümmungsmittelpunkt für den Punkt O der Mittellinie nicht nach A, sondern weiter nach rechts von A zu verlegen, also dem Haken in dem gefährdetsten Querschnitt eine möglichst geringe Krümmung zu ertheilen[1]).

[1]) S. des Verfassers Maschinenelemente 1891/92, S. 412, Fig. 252.

Ferner erhellt aus dieser Sachlage, dass ein aus zähem Material gefertigter Haken, welcher sich unter Einwirkung der Last streckt, hierdurch seine Anstrengung vermindert.

2. Hohlcylinder, welcher als Walze dient, ist auf die Längeneinheit durch den Druck 2 Q belastet, Fig. 172.

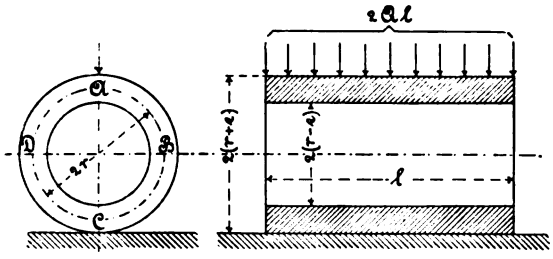


Fig. 172.

Da sich bei dieser Belastungsweise die Viertelcylinder AB, BC, CD und DA gleich verhalten, so genügt es, einen derselben, etwa AB der Betrachtung zu unterwerfen. Wir denken uns das

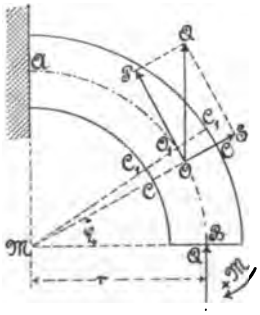


Fig. 173.

Viertel AB herausgeschnitten, wie Fig. 173 darstellt, ersetzen die Wirkung der äusseren Kräfte auf den Querschnitt bei A durch Befestigung, auf denjenigen bei B durch die Kraft Q und ein Kräftepaar vom Momente M, welches positiv oder negativ genommen wird, je nachdem es auf Vermehrung oder Verminderung der Krümmung der Mittellinie im Punkte B hinwirkt.

Für einen beliebigen, durch den Winkel φ bestimmten Querschnitt COC ergiebt sich bei Verlegung der Kraft Q nach O die Normalkraft

$$P = -Q\cos\varphi,$$

das biegende Moment

$$M_b = M - Qr(1 - \cos\varphi).$$

Die Schubkraft $S = Q\sin\varphi$ werde vernachlässigt. Nach Gl. 210 ist

$$\sigma = \frac{P}{f} + \frac{M_b}{fr} + \frac{M_b}{\varkappa f r}\frac{\eta}{r+\eta},$$

worin f der auf die Einheit der Cylinderlänge kommende Querschnitt.

Folglich

$$f\sigma = -Q\cos\varphi + \frac{M}{r} - Q + Q\cos\varphi$$

$$+\frac{1}{\varkappa}\left(\frac{M}{r} - Q + Q\cos\varphi\right)\frac{\eta}{r+\eta},$$

$$f\sigma = \frac{M}{r} - Q + \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{M}{r} - Q + Q\cos\varphi\right)\frac{\eta}{r+\eta}.$$

Zur Bestimmung des unbekannten Momentes M führt die Erwägung, dass, wie auch die Formänderung der Mittellinie AB des Cylinderviertels sein möge, jedenfalls die beiden Normalen AM und BM derselben immer rechtwinklig zu einander bleiben werden, dass also der rechte Winkel AMB, der auch gleichzeitig derjenige der beiden Querschnitte bei A und bei B ist, eine Aenderung nicht erfährt.

Es sei $C_1O_1C_1$ ein dem Querschnitt COC unendlich nahe gelegener zweiter Querschnitt und $d\varphi$ der Winkel, den beide Querschnitte vor Eintritt der Formänderung mit einander einschliessen. Unter Einwirkung der äusseren Kräfte wird sich der Letztere nach § 54 um

$$\triangle\, d\varphi = \omega\, d\varphi$$

ändern. Die Summe dieser Aenderungen für alle zwischen B und A

gelegenen Querschnitte muss nach dem eben Erörterten gleich Null sein, d. h.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega \, d\varphi = 0.$$

Unter Beachtung, dass nach der letzten der Gl. 209

$$\omega = \frac{\alpha}{f}\left(P + \frac{M_b}{r} + \frac{M_b}{\varkappa r}\right),$$

also hier

$$\omega = \frac{\alpha}{f}\left[\frac{M}{r} - Q + \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{M}{r} - Q + Q\cos\varphi\right)\right],$$

wird

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega \, d\varphi = \frac{\alpha}{f}\left[\left\{\frac{M}{r} - Q + \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{M}{r} - Q\right)\right\}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\varkappa} Q\right] = 0.$$

Somit

$$\frac{M}{r} - Q = -\frac{2Q}{(1+\varkappa)\pi},$$

oder

$$M = Q\left(1 - \frac{2}{(1+\varkappa)\pi}\right) r.$$

Die Einführung des für

$$\frac{M}{r} - Q$$

gefundenen Werthes in die Gleichung zur Ermittlung der Spannungen ergiebt

$$f\sigma = -\frac{2Q}{(1+\varkappa)\pi} + \frac{1}{\varkappa}\left(-\frac{2Q}{(1+\varkappa)\pi} + Q\cos\varphi\right)\frac{\eta}{r+\eta},$$

$$\sigma = \frac{Q}{f}\left[-\frac{2}{(1+\varkappa)\pi} + \frac{1}{\varkappa}\left(-\frac{2}{(1+\varkappa)\pi} + \cos\varphi\right)\frac{\eta}{r+\eta}\right]. \quad 223)$$

Hiernach findet die grösste Anstrengung im Querschnitte bei A und zwar an der Innenfläche des Hohlcylinders durch tangential gerichtete Zugspannungen $= 10{,}90\,\frac{Q}{f}$ statt. An der Aussenfläche desselben Querschnitts herrscht eine Druckspannung $8{,}32\,\frac{Q}{f}$. Im Querschnitt bei B wirkt innen die Druckspannung $7{,}40\,\frac{Q}{f}$ und aussen die Zugspannung $3{,}88\,\frac{Q}{f}$. In beiden Querschnitten geht die Spannung durch Null hindurch. Die Stelle, an welcher dies stattfindet, ergiebt sich

für den Querschnitt $B\,(\varphi = 0)$

aus

$$0 = -0{,}63 + 73{,}2\,.\,0{,}37\,\frac{\eta}{5\,e + \eta}$$

durch den Werth

$$\eta = 0{,}12\,e,$$

für den Querschnitt $A\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$

aus

$$0 = -0{,}63 - 73{,}2\,.\,0{,}63\,\frac{\eta}{5\,e + \eta}$$

durch den Abstand

$$\eta = -0{,}067\,e.$$

Die Darstellung Fig. 174 mit HBJ als Linie der Spannungen im Querschnitte bei B und $FEAG$ als Linie der Spannungen im Querschnitte bei A giebt über das Gesetz, nach welchem sich die Spannung in den beiden Querschnitten ändert, ein anschauliches Bild.

Zur Erweiterung desselben in Bezug auf dazwischen gelegene Querschnitte werde noch Folgendes festgestellt.

Für $\eta = 0$ findet sich aus Gl. 224

$$\sigma = -0{,}63\,\frac{Q}{f},$$

also unabhängig von φ, d. h. in allen Punkten der mittleren Cylinderfläche ist die Spannung eine negative, also Pressung, und von gleicher Grösse.

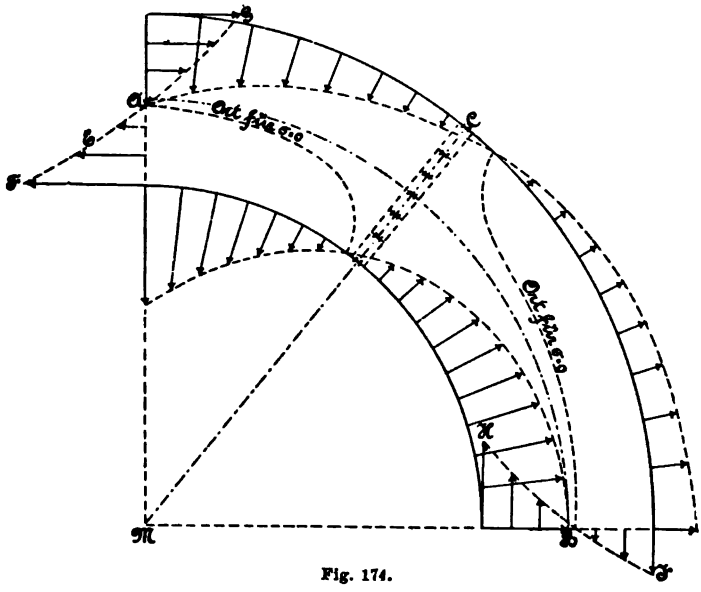


Fig. 174.

Auch giebt es in jedem Cylinderviertel einen Querschnitt, in welchem nur Druckspannungen und zwar ebenfalls von gleicher Grösse auftreten. Setzen wir in Gl. 223

$$\cos\varphi = \frac{2}{(1+\varkappa)\,\pi} = 0{,}63,$$

so entfällt das Glied, welches die Veränderlichkeit und den Vorzeichenwechsel von σ bedingt, und es wird

$$\sigma = -\frac{Q}{f}\,\frac{2}{(1+\varkappa)\,\pi} = -\,0{,}63\,\frac{Q}{f}.$$

Dieser Querschnitt ist in Fig. 174 durch die Linie MC wiedergegeben.

Zur Feststellung derjenigen Punkte im Innern des Hohlcylinders, in welchem $\sigma = 0$ wird, findet sich nach Gl. 223

$$0 = -\frac{2}{(1+\varkappa)\,\pi} + \frac{1}{\varkappa}\left(-\frac{2}{(1+\varkappa)\,\pi} + \cos\varphi\right)\frac{\eta}{r+\eta},$$

woraus

$$\cos\varphi = \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{\varkappa}{1+\varkappa}\,\frac{r}{\eta}\right) = 0{,}64 + 0{,}043\,\frac{e}{\eta},$$

oder

$$\eta = r\,\frac{\varkappa}{1+\varkappa}\cdot\frac{1}{\frac{\pi}{2}\cos\varphi - 1} = 0{,}0675\,e\,\frac{1}{\frac{\pi}{2}\cos\varphi - 1}.$$

An der innersten Faserschicht, d. h. für $\eta = -e$, wird $\sigma = 0$, wenn

$$\cos\varphi = 0{,}64 - 0{,}043 = 0{,}597,$$

an der äussersten Fläche, d. h. für $\eta = +e$, fällt $\sigma = 0$ aus, wenn

$$\cos\varphi = 0{,}64 + 0{,}043 = 0{,}683.$$

Mit $\cos\varphi = 0{,}5$ wird $\sigma = 0$ für

$$\eta = 0{,}0675\,\frac{1}{\frac{\pi}{4} - 1}\,e = -0{,}31\,e,$$

und mit $\cos\varphi = 0{,}8$ wird $\sigma = 0$ für

$$\eta = 0{,}0675\,\frac{1}{0{,}4\,\pi - 1}\,e = +0{,}26\,e.$$

Auf diesem Wege erhalten wir, wie Fig. 174 zeigt, zwei Kurven, welche diejenigen Flächenelemente bestimmen, in denen die Normalspannungen gleich Null sind.

Ferner sind daselbst auch noch in radialer Richtung eingetragen die Spannungen, welche an den verschiedenen Punkten der Innen- und Aussenfläche des Hohlcylinders in tangentialer Richtung herrschen.

Was schliesslich die Formänderung anbelangt, so ist ohne Weiteres zu übersehen, dass die kreisförmige Mittellinie eine elliptische Form annimmt, entsprechend einer Vergrösserung des Krümmungshalbmessers bei A und einer Verkleinerung desselben bei B.

§ 56. Versuchsergebnisse.

Zu einer theilweisen Prüfung des in § 55, Ziff. 2 gefundenen Hauptergebnisses Gl. 223 bei Verwendung von Material, welches für die Herstellung solcher Hohlcylinder vorzugsweise in Betracht kommen kann, führte Verfasser die nachstehend besprochenen Versuche durch.

Aus einem gusseisernen Hohlstab mit kreisförmigem Querschnitt und zwar von dem Material: Gusseisen *A*, § 35 (Bruchstück eines der unter *c* — S. 180 und 181 — aufgeführten 3 Hohlstäbe, Zugfestigkeit 1579 kg, Drehungsfestigkeit 1297 kg) wurden kurze Hohlcylinder von der Länge $l = 6{,}0$ cm durch Drehen herausgearbeitet und nach Massgabe der Fig. 172 mit $2\,Q\,l$ belastet. Der äussere Cylindermantel wurde nur soweit abgedreht, als es erforderlich war, um den Druckplatten der Prüfungsmaschine gute Anlageflächen zu sichern.

In ganz gleicher Weise wurden kurze Hohlcylinder aus dem Gusseisen *B*, § 35 (Bruchstück eines der unter *b*, *α* — S. 176 — erwähnten 2 Hohlstäbe, Zugfestigkeit 1679 kg, Drehungsfestigkeit 1439 kg) hergestellt.

Die Ergebnisse der Gl. 223, in welcher hier

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad \eta = -e, \qquad f = \frac{d - d_0}{2} \text{ (Fig. 106, S. 180)}$$

zu setzen ist, wodurch wird

$$\sigma_{max} = \frac{2\,Q}{d - d_0}\left[-\frac{2}{(1+\varkappa)\,\pi} + \frac{2}{\varkappa\,(1+\varkappa)\,\pi}\,\frac{\frac{e}{r}}{1 - \frac{e}{r}} \right],$$

finden sich, nach dieser Gleichung berechnet, in der folgenden Zusammenstellung unter σ_{max} eingetragen.

Gusseisen A.

Hohlcylinder, innen unbearbeitet.

Bezeichnung	Durchmesser äusserer d cm	Durchmesser innerer d_0 cm	Verhältniss $\frac{e}{r}=\frac{d-d_0}{d+d_0}$	$\varkappa$, Gl. 214	Bruchbelastung $2Ql$ kg	Bruchfestigkeit σ_{max} kg/qcm
1	10,0	7,0	0,176	0,0105	5410	3657
3	10,06	7,06	0,175	0,0104	5420	3685
5	10,02	6,92	0,183	0,0114	5170	3269

Bemerkungen.

Der Bruch erfolgt bei No. 1 und 3 durch gleichzeitiges Einreissen in den Querschnitten A und C, Fig. 172, welches innen beginnend sich auf etwa drei Viertel der Wandstärke nach aussen fortsetzt. Der äussere Cylindermantel bleibt unverletzt.

Im Falle No. 5 reisst zunächst der Querschnitt innen bei A allein; die Fortsetzung des Zusammendrückens veranlasst denjenigen bei C, nachzufolgen.

Hohlcylinder, innen bearbeitet.

Bezeichnung	Durchmesser äusserer d cm	Durchmesser innerer d_0 cm	Verhältniss $\frac{e}{r}=\frac{d-d_0}{d+d_0}$	$\varkappa$, Gl. 214	Bruchbelastung $2Ql$ kg	Bruchfestigkeit σ_{max} kg/qcm
2	10,06	7,28	0,160	0,00867	4410	3498
4	10,02	7,32	0,156	0,00823	4395	3695

Bemerkungen.

Wie oben No. 5.

Gusseisen B.

Hohlcylinder, innen unbearbeitet.

Bezeichnung	Durchmesser äusserer d cm	Durchmesser innerer d_0 cm	Verhältniss $\frac{e}{r} = \frac{d-d_0}{d+d_0}$	$\varkappa$, Gl. 214	Bruchbelastung $2Ql$ kg	Bruchfestigkeit σ_{max} kg qcm
1	10,08	6,96	0,183	0,0114	5005	3135
3	10,06	6,96	0,182	0,01127	4980	3156

Bemerkungen.

Wie oben bei Gusseisen *A*, No. 5.

Hohlcylinder, innen bearbeitet.

Bezeichnung	Durchmesser äusserer d cm	Durchmesser innerer d_0 cm	Verhältniss $\frac{e}{r} = \frac{d-d_0}{d+d_0}$	$\varkappa$, Gl. 214	Bruchbelastung $2Ql$ kg	Bruchfestigkeit σ_{max} kg/qcm
2	10,07	7,43	0,151	0,00771	3980	3508
4	10,04	7,42	0,150	0,00760	4200	3759

Bemerkungen.

Wie oben bei Gusseisen *A*, No. 5.

Zu diesen Ergebnissen ist Nachstehendes zu bemerken.

a) Hohlcylinder *A* 1 und *A* 3 sind die beiden einzigen der Versuchskörper, welche an den zwei diametral einander gegenüber liegenden Stellen gleichzeitig einreissen. Sie müssen demnach einen grösseren Werth von σ_{max} aufweisen, als sonst gleiche Hohlcylinder, bei denen dieses Einreissen nach einander stattfindet. Daraus erklärt sich die geringere Bruchfestigkeit von *A* 5 gegenüber *A* 1 und *A* 3 ohne Weiteres.

b) Zum Zwecke der Prüfung des Einflusses der Gusshaut kann nach Massgabe des unter a Gesagten nur *A* 5 mit *A* 2 und *A* 4 verglichen werden. Hierbei findet sich die Festigkeit der

innen von der Gusshaut befreiten Hohlcylinder $A\,2$ und $A\,4$ um durchschnittlich

$$\frac{3498 + 3695}{2} - 3269 = 3596 - 3269 = 327 \text{ kg},$$

d. s.

$$100\,\frac{327}{3269} = 10\,\%,$$

grösser als diejenige des unbearbeiteten Körpers $A\,5$.

Für das Gusseisen B ergiebt sich dieser Unterschied zu

$$\frac{3508 + 3759}{2} - \frac{3135 + 3156}{2} = 3633 - 3145 = 488 \text{ kg},$$

d. s.

$$100\,\frac{488}{3145} = 15{,}5\,\%.$$

Diese Zahlen bestätigen den bereits in § 22, Ziff. 3 festgestellten Einfluss der Gusshaut.

(Vergl. auch § 58, Fussbemerkung S. 371.)

c) Die Zugfestigkeit des Gusseisens A war zu 1579 kg, diejenige des Gusseisens B zu 1679 kg ermittelt worden. Wird nach S. 111 No. 4 die Biegungsfestigkeit für den rechteckigen Stab zu 1,75 mal Zugfestigkeit angenommen, so wäre für bearbeitete Stäbe auf eine Biegungsfestigkeit von

$$1579 \,.\, 1{,}75 = 2763 \text{ kg},$$

bezw.

$$1679 \,.\, 1{,}75 = 2938 \text{ kg}$$

zu rechnen gewesen. Thatsächlich sind die Werthe von σ_{max} (trotz des Einreissens an zunächst einer Stelle) für das Gusseisen A (No. 2 und 4) um

$$3596 - 2763 = 833 \text{ kg}, \quad \text{oder} \quad 100\,\frac{833}{2763} = 30\,\%,$$

für das Gusseisen B (No. 2 und 4) um

$$3633 - 2938 = 695 \text{ kg}, \quad \text{oder} \quad 100\,\frac{695}{2938} = 24\,\%$$

grösser. Dieser Unterschied dürfte zum grossen Theile auf Rechnung der dem Gusseisen eigenthümlichen Veränderlichkeit des Dehnungskoefficienten α zu setzen sein, welche den Verlauf der Spannungslinie z. B. AEF im Querschnitt A, Fig. 174, dahin abändert, dass die wagrechten Ordinaten weniger rasch wachsen, als die Rechnung, welche Unveränderlichkeit des Dehnungskoefficienten voraussetzt, ergiebt. War diese Abweichung schon bei geradem stabförmigen Körper von grossem Einflusse (vergl. § 20, namentlich Fig. 65), so muss dieser hier noch bedeutender ausfallen.

Um zu prüfen, inwieweit etwa Gussspannungen bei der vorliegenden Frage betheiligt seien, wurden diejenigen Hohlcylinder, welche nur an einer Stelle gerissen waren und bei denen der Versuch nicht bis zum Einreissen an der zweiten (gegenüber liegenden) Stelle fortgesetzt worden war, an der Rissstelle aufgeschnitten und sodann genau gemessen, ob hierbei ein Zusammengehen oder Erweitern des Ringes (oder der Schnittfuge) stattfand. Eine solche Aenderung liess sich nicht oder nur in ganz verschwindender Grösse feststellen. Das Ergebniss blieb auch nach vollständiger Beseitigung der äusseren Gusshaut, sowie nach Ausbohren des Ringes auf die halbe Stärke das gleiche. Hiernach können Gussspannungen von Erheblichkeit nicht vorhanden gewesen sein.

Werden diejenigen Werthe von σ_{max}, welche für die ausgebohrten Hohlcylinder ermittelt wurden, in Vergleich mit der Zugfestigkeit gestellt, so findet sich für das Gusseisen A

$$\sigma_{max} = \frac{3596}{1579} K_z = 2{,}28 \text{ mal Zugfestigkeit},$$

für das Gusseisen B

$$\sigma_{max} = \frac{3633}{1679} K_z = 2{,}16 \text{ mal Zugfestigkeit},$$

also durchschnittlich	2,22 mal Zugfestigkeit,
gegen	1,75 mal Zugfestigkeit
beim geraden Stabe.	

II. Die Mittellinie ist eine doppelt gekrümmte Kurve.

In Berücksichtigung der Grenzen, welche diesem Buche gezogen sind, haben wir uns hier auf das Nachstehende zu beschränken.

§ 57. Die gewundenen Drehungsfedern.

Eine genaue Berechnung dieser Federn ist sehr umständlich; der hiermit verknüpfte Zeitaufwand würde in den allermeisten Fällen ausser Verhältniss zur praktischen Bedeutung des Ergebnisses stehen. Infolge dessen pflegt man bei Feststellung der Zusammendrückung oder Ausdehnung, sowie der Beanspruchung Annahmen zu machen, welche zu genügend einfachen Beziehungen führen.

Die Mittellinie $A\,B\,C\,D\,E$, Fig. 175, des gewundenen Stabes

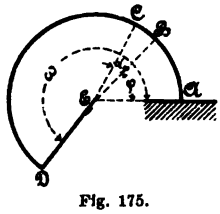


Fig. 175.

von gleichem Querschnitte bestehe aus dem Kreisbogen $A\,B\,C\,D$ vom Halbmesser ϱ und aus der Geraden $D\,E$, welche in die Richtung eines Halbmessers fällt. Im Punkte A sei der Stab eingespannt und im freien Endpunkte E, der gleichzeitig Mittelpunkt des Kreises ist, durch eine Kraft P senkrecht zur Bildebene (Ebene des Kreises) belastet.

Für den beliebigen Querschnitt im Punkte B, welcher durch den Winkel φ bestimmt sein möge, ergiebt die Kraft P ein auf Drehung wirkendes Kräftepaar vom Moment $M_d = P\,\varrho$ und eine Schubkraft P, welche vernachlässigt wird. Die Materialanstrengung erscheint hiernach festgestellt durch Gl. 124, natürlich mit derjenigen Genauigkeit, mit welcher diese für den geraden Stab entwickelte Beziehung auf den gekrümmten Stab übertragen werden darf.

Der Querschnitt im Punkte C der Mittellinie, welcher von demjenigen im Punkte B um $ds = \varrho\,d\varphi$ absteht, muss sich unter Einwirkung von M_d gegenüber dem letzteren Querschnitt verdrehen. Ist ϑ der verhältnissmässige Drehungswinkel, mit der soeben bezeichneten Genauigkeit bestimmt:

für den kreisförmigen Querschnitt durch Gl. 107

$$\vartheta = \frac{32}{\pi} \frac{P\varrho}{d^4} \beta,$$

für den rechteckigen Querschnitt durch Gl. 154

$$\vartheta = 3{,}6 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} P \varrho \beta,$$

so beträgt diese Verdrehung $\vartheta\, ds = \vartheta\, \varrho\, d\varphi$. Dementsprechend wird sich der Angriffspunkt E der Kraft P um $\vartheta\, ds \,.\, \varrho = \vartheta\, \varrho^2 d\varphi$ in Richtung der letzteren bewegen. Hieraus ergiebt sich die Strecke y', um welche der Punkt E infolge der Verdrehung sämmtlicher Querschnitte des Bogens $A\,B\,C\,D$ fortrückt, zu

$$y' = \int_0^{\omega} \vartheta\, \varrho^2 d\varphi.$$

Durch Einführung von

$$\vartheta = A \,.\, \varrho,$$

wobei beträgt:

für den kreisförmigen Querschnitt

$$A = \frac{32}{\pi} \frac{1}{d^4} P \beta,$$

für den rechteckigen Querschnitt

$$A = 3{,}6 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} P \beta,$$

folgt

$$y' = A \int_0^{\omega} \varrho^3 d\varphi. \quad \ldots\ldots \quad 225)$$

Die Bewegung von E aus Anlass der Durchbiegung des Armes DE wird — als verhältnissmässig klein — vernachlässigt.

I. Die cylindrischen Schraubenfedern, Fig. 176 und 177.

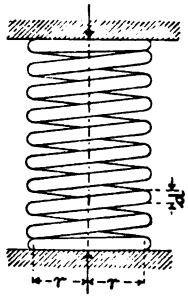


Fig. 176.

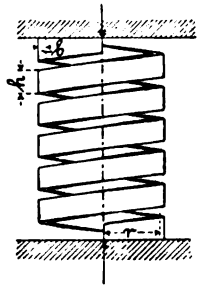


Fig. 177.

Das in Gl. 225 gewonnene Gesetz überträgt man nun auf diese Federn, indem bei i Windungen der Schraubenlinie

$$\omega = 2\pi i$$

gesetzt und an die Stelle von ϱ der Halbmesser r eingeführt wird. Damit folgt

$$y' = A\int_0^{2\pi i} r^3 d\varphi = 2\pi i A r^3,$$

insbesondere für den kreisförmigen Querschnitt unter Beachtung der Gl. 105, nach welcher

$$P r = \frac{\pi}{16} k_d d^3,$$

$$y' = 64\, i \frac{P r^3}{d^4} \beta = 4\pi i \frac{r^2}{d} k_d \beta, \quad \ldots \quad 226)$$

und für den rechteckigen Querschnitt bei Berücksichtigung der Gl. 123

$$P r = \frac{2}{9} k_d b^2 h,$$

$$y' = 7{,}2\,\pi i \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} P r^3 \beta = 1{,}6\,\pi i \frac{b^2 + h^2}{b\, h^2} r^2 k_d \beta. \quad 227)$$

Diese Gleichung lässt sich auch unmittelbar aus der Beziehung 153 ableiten.

Die mechanische Arbeit, welche durch die von Null bis auf P gewachsene Belastung bei Zurücklegung des Weges y' verrichtet wird, ist $\frac{1}{2} P y'$. Dieselbe muss gleich sein der Arbeit, welche die Formänderung des gewundenen Stabes, dessen Mittellinie die Länge $2 \pi r i$ besitzt, fordert. Mit der Genauigkeit, mit welcher die zunächst für den geraden Stab entwickelte Gl. 153 auf den gekrümmten übertragen werden darf, findet sich wegen $M_d = P r$ und $l = 2 \pi r i$

$$\frac{1}{2} P y' = \frac{9}{5} \beta \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} (P r)^2 2 \pi r i,$$

$$y' = 7{,}2 \pi i \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} P r^3 \beta,$$

wie oben ermittelt.

In ganz gleicher Weise kann auch die Beziehung 226 aus der Arbeitsgleichung für den kreiscylindrischen Stab abgeleitet werden.

Die mechanische Arbeit A, welche die cylindrische Schraubenfeder aufzunehmen vermag, wird unmittelbar durch die Gl. 147, worin

$$V = \frac{\pi}{4} d^2 . 2 \pi r i,$$

bezw. durch die Gl. 152 mit

$$V = b h . 2 \pi r i$$

bestimmt, oder kann auch mittelst der Beziehungen 226 und 227 unter Berücksichtigung der Gleichungen 105 und 123 als Produkt $\frac{1}{2} P y'$ ermittelt werden.

2. Die Kegelfedern, Fig. 178, 179 und 180.

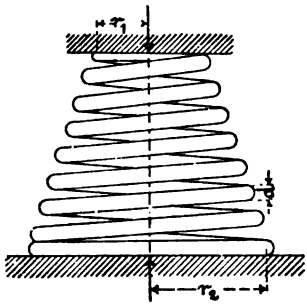


Fig. 178.

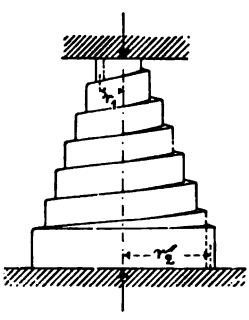


Fig. 179.

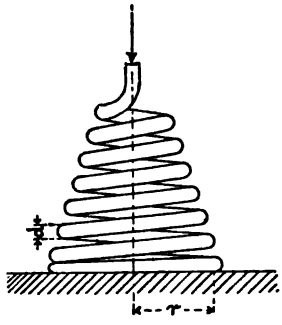


Fig. 180.

Auch auf diese Federn pflegt die Beziehung 225 übertragen zu werden, indem man ϱ als Veränderliche ansieht und bei i Windungen setzt

$$\varrho = r_2 - (r_2 - r_1)\frac{\varphi}{2\pi i},$$

$$d\varrho = -\frac{r_2 - r_1}{2\pi i}\,d\varphi,$$

$$d\varphi = -\frac{2\pi i}{r_2 - r_1}\,d\varrho.$$

Hiermit wird dann

$$y' = -\frac{2\pi i}{r_2 - r_1} A \int_{r_2}^{r_1} \varrho^3 \, d\varrho = \frac{\pi i}{2} \frac{r_2^4 - r_1^4}{r_2 - r_1} A$$

$$= \frac{\pi i}{2} (r_1 + r_2)(r_1^2 + r_2^2) A.$$

Für den kreisförmigen Querschnitt folgt

$$y' = \frac{\pi i}{2} (r_1 + r_2)(r_1^2 + r_2^2) \frac{32}{\pi} \frac{1}{d^4} P\beta$$

$$= 16\, i \frac{(r_1 + r_2)(r_1^2 + r_2^2)}{d^4} P\beta \quad . \quad . \quad . \quad 228)$$

und im Falle der Fig. 180, wegen $r_1 = 0$, $r_2 = r$

$$y' = 16\, i \frac{r^3}{d^4} P\beta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 229)$$

Die Anstrengung k_d wird bestimmt aus

$$P r_2 = \frac{\pi}{16} k_d d^3 \text{ (Fig. 178)},$$

bezw.

$$P r = \frac{\pi}{16} k_d d^3 \text{ (Fig. 180)}.$$

Für den rechteckigen Querschnitt, Fig. 179, ergiebt sich

$$y' = \frac{\pi i}{2} (r_1 + r_2)(r_1^2 + r_2^2)\, 3{,}6 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} P\beta$$

$$= 1{,}8\, \pi i (r_1 + r_2)(r_1^2 + r_2^2) \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3} P\beta. \quad . \quad 230)$$

Die Anstrengung k_d folgt aus

$$P r_2 = \frac{2}{9} k_d b^2 h.$$

Die vorstehenden Entwicklungen bedürfen hinsichtlich des Grades der Genauigkeit einer gründlichen Prüfung auf dem Wege des Versuchs, namentlich dann, wenn die Querschnittsabmessungen der Federn nicht sehr klein sind gegenüber dem Krümmungshalbmesser der Mittellinie und wenn die Ganghöhe der Schraubenfedern verhältnissmässig bedeutend ist.

Sechster Abschnitt.

Gefässe.

§ 58. Hohlcylinder.

I. Innerer und äusserer Druck.

Unter Bezugnahme auf Fig. 181 bezeichne

r_i den inneren Halbmesser des an den Stirnseiten geschlossen vorausgesetzten Hohlcylinders,

r_a den äusseren Halbmesser desselben,

p_i die Pressung der den Cylinderhohlraum erfüllenden Flüssigkeit,

p_a die Pressung der den Cylinder umschliessenden Flüssigkeit.

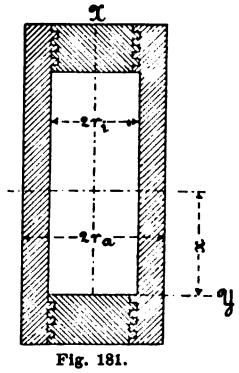


Fig. 181.

Der Abschluss an den Stirnseiten des Cylinders sei derart, dass die Formänderung des abschliessenden Bodens einen Einfluss auf die Cylinderwandung nicht äussere oder dass dieser wenigstens unerheblich ausfalle.

Der Cylinder werde auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, in der Weise, dass die x-Achse mit der Cylinderachse, die yz-Ebene mit der einen, den Hohlraum begrenzenden Stirnebene des Cylinders zusammenfällt, wie dies Fig. 182 erkennen lässt.

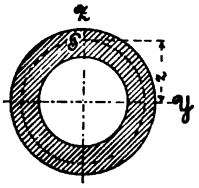


Fig. 182.

Wir greifen einen beliebigen Punkt P des Cylinders heraus, welcher in der xz-Ebene liegt und vor Eintritt der Formänderung absteht:

von der yz-Ebene um x, und von der Cylinderachse um z.

Unter Einwirkung der den Cylinder belastenden Flüssigkeitspressungen wird sich ausser x noch z, und zwar um ζ vergrössern. Aus der xz-Ebene tritt der Punkt hierbei nicht heraus.

Ferner werden im Punkte P folgende Spannungen entstehen:

σ_x in Richtung der x-Achse, d. i. in achsialer Richtung,

σ_y in „ „ y- „ , d. i. in der Richtung des Umfanges, in tangentialer Richtung, und

σ_z in Richtung der z-Achse, d. i. in radialer Richtung.

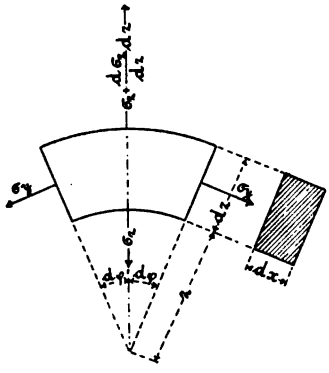


Fig. 183.

Dementsprechend wirken auf das unendlich kleine Körperelement, Fig. 183, welches wir uns durch Cylinderflächen im Ab-

stande z und $z + dz$ aus dem Cylinder herausgeschnitten denken, in der Bildebene der Figur die Kräfte:

$\sigma_z \,.\, 2\, z\, d\varphi\, dx$ radialeinwärts,

$\left(\sigma_z + \frac{d\sigma_z}{dz}\, dz\right) . 2 \left(z + dz\right) d\varphi\, dx$ **radial auswärts,**

$\sigma_y \,.\, dz\, dx$ senkrecht zu den beiden Flächen $dz\, dx$.

Der Gleichgewichtszustand fordert nun, dass die Summe der Kräfte in senkrechter Richtung gleich Null ist, d. h.

$$\sigma_z \,.\, 2\, z\, d\varphi\, dx - \left(\sigma_z + \frac{d\sigma_z}{dz}\, dz\right) . 2 \left(z + dz\right) d\varphi\, dx + 2\, \sigma_y \,.\, dz\, dx \,.\, \sin\left(d\varphi\right) = 0,$$

woraus sich unter Beachtung, dass $\sin\left(d\varphi\right) = \sim d\varphi$, und bei Vernachlässigung des unendlich kleinen Gliedes

$$\frac{d\sigma_z}{dz}\, dz$$

gegenüber den übrigen endlichen Grössen ergiebt

$$\frac{d\sigma_z}{dz} = \frac{1}{z}\left(\sigma_y - \sigma_z\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 231)$$

In § 7 fanden wir unter der Voraussetzung vollkommener Gleichartigkeit des Materials für ein beliebiges Körperelement, welches in Richtung der drei Achsen gleichzeitig die Spannungen $\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z$ erfährt, die hieraus sich ergebenden Dehnungen:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{in Richtung der } x\text{-Achse} & \varepsilon_1 = \alpha\left(\sigma_x - \dfrac{\sigma_y + \sigma_z}{m}\right), \\ \text{„ „ „ } y\text{- „} & \varepsilon_2 = \alpha\left(\sigma_y - \dfrac{\sigma_z + \sigma_x}{m}\right), \\ \text{„ „ „ } z\text{- „} & \varepsilon_3 = \alpha\left(\sigma_z - \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{m}\right). \end{array}\right\} \quad 15)$$

Hieraus folgt

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \alpha \left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 2 \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{m} \right),$$

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{m}{m-2} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{\alpha} = \frac{m}{m-2} \frac{e}{\alpha},$$

sofern

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = e. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 232)$$

Wird hierzu die aus der ersten der Gleichungen 15 abgeleitete Beziehung

$$m \sigma_x - \sigma_y - \sigma_z = m \frac{\varepsilon_1}{\alpha}$$

hinzugefügt, so ergiebt sich

$$m \sigma_x + \sigma_x = \frac{m}{m-2} \frac{e}{\alpha} + m \frac{\varepsilon_1}{\alpha},$$

$$\sigma_x = \frac{m}{1+m} \frac{1}{\alpha} \left(\varepsilon_1 + \frac{e}{m-2} \right).$$

Das gleiche Verfahren liefert

$$\sigma_y = \frac{m}{1+m} \frac{1}{\alpha} \left(\varepsilon_2 + \frac{e}{m-2} \right),$$

$$\sigma_z = \frac{m}{1+m} \frac{1}{\alpha} \left(\varepsilon_3 + \frac{e}{m-2} \right).$$

Hieraus findet sich bei Berücksichtigung der Gl. 99

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2}{\beta} \left(\varepsilon_1 + \frac{e}{m-2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{2}{\beta} \left(\varepsilon_2 + \frac{e}{m-2} \right) \\ \sigma_z &= \frac{2}{\beta} \left(\varepsilon_3 + \frac{e}{m-2} \right) \end{aligned}\right\} . \quad . \quad . \quad 233)$$

Im vorliegenden Falle beträgt, da sich z um ζ ändert, die tangentiale Dehnung ε_2 im Punkte P

$$\varepsilon_2 = \frac{2\pi(z+\zeta) - 2\pi z}{2\pi z} = \frac{\zeta}{z}. \quad \ldots \quad 234)$$

Für die radiale Dehnung ε_3 liefert die Erwägung, dass die Strecke dz die Aenderung $d\zeta$ erfährt, den Ausdruck

$$\varepsilon_3 = \frac{d\zeta}{dz}. \quad \ldots \quad 235)$$

Hiermit wird aus den Gleichungen 233

$$\sigma_x = \frac{2}{\beta}\left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_1 + \frac{\zeta}{z} + \frac{d\zeta}{dz}}{m-2}\right)$$

$$\sigma_y = \frac{2}{\beta}\left(\frac{\zeta}{z} + \frac{\varepsilon_1 + \frac{\zeta}{z} + \frac{d\zeta}{dz}}{m-2}\right)$$

$$\sigma_z = \frac{2}{\beta}\left(\frac{d\zeta}{dz} + \frac{\varepsilon_1 + \frac{\zeta}{z} + \frac{d\zeta}{dz}}{m-2}\right).$$

Die Einsetzung des aus der ersten dieser Gleichungen folgenden Werthes

$$\varepsilon_1 = \frac{m-2}{2(m-1)}\beta\sigma_x - \frac{\frac{\zeta}{z} + \frac{d\zeta}{dz}}{m-1}$$

in die beiden anderen führt zu

$$\left.\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{2}{m-1}\frac{1}{\beta}\left(m\frac{\zeta}{z} + \frac{d\zeta}{dz}\right) + \frac{\sigma_x}{m-1} \\ \sigma_z &= \frac{2}{m-1}\frac{1}{\beta}\left(\frac{\zeta}{z} + m\frac{d\zeta}{dz}\right) + \frac{\sigma_x}{m-1} \end{aligned}\right\} \ldots \quad 236)$$

Hier ist unter Voraussetzung gleichmässiger Vertheilung der Achsialkraft $\pi r_i^2 p_i - \pi r_a^2 p_a$ über den Cylinderquerschnitt $\pi r_a^2 - \pi r_i^2$, d. h.

$$\pi (r_a^2 - r_i^2) \sigma_x = \pi (p_i r_i^2 - p_a r_a^2),$$

die achsiale Spannung

$$\sigma_x = \frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \quad \ldots\ldots 237)$$

als unveränderliche Grösse anzusehen.

Die Einführung der Werthe σ_y und σ_z aus den Gleichungen 236 in die Gleichung 231 ergiebt

$$z \frac{d^2\zeta}{dz^2} + \frac{d\zeta}{dz} - \frac{\zeta}{z} = 0,$$

oder

$$\frac{d^2\zeta}{dz^2} + \frac{d\left(\frac{\zeta}{z}\right)}{dz} = 0.$$

Durch Integration

$$\frac{d\zeta}{dz} + \frac{\zeta}{z} = \text{constant} = c_1.$$

Hieraus

$$z \frac{d\zeta}{dz} + \zeta = c_1 z,$$

oder

$$\frac{d(z\zeta)}{dz} = c_1 z,$$

und bei nochmaliger Integration

$$z\zeta = \frac{1}{2} c_1 z^2 + c_2.$$

Mit den hieraus sich ergebenden Werthen

$$\frac{\zeta}{z} = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{z^2},$$

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{z^2}$$

liefern die beiden Gleichungen 236

$$\left.\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{2}{m-1}\frac{1}{\beta}\left[\frac{c_1}{2}(m+1) + \frac{c_2}{z^2}(m-1)\right] + \frac{\sigma_x}{m-1} \\ \sigma_z &= \frac{2}{m-1}\frac{1}{\beta}\left[\frac{c_1}{2}(m+1) - \frac{c_2}{z^2}(m-1)\right] + \frac{\sigma_y}{m-1} \end{aligned}\right\}. \quad 238)$$

Die zwei Konstanten c_1 und c_2 bestimmen sich aus den Bedingungen, dass sein muss:

$$\text{für } z = r_i \qquad \sigma_z = -p_i,$$

$$\text{„ } z = r_a \qquad \sigma_z = -p_a,$$

d. h.

$$-p_i = \frac{2}{m-1}\frac{1}{\beta}\left[\frac{c_1}{2}(m+1) - \frac{c_2}{r_i^2}(m-1)\right] + \frac{\sigma_x}{m-1},$$

$$-p_a = \frac{2}{m-1}\frac{1}{\beta}\left[\frac{c_1}{2}(m+1) - \frac{c_2}{r_a^2}(m-1)\right] + \frac{\sigma_x}{m-1},$$

woraus

$$c_1 = \frac{m-1}{m+1}\beta\left(\frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{\sigma_x}{m-1}\right),$$

$$c_2 = \frac{p_i - p_a}{2}\beta\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}.$$

Hiermit wird unter Beachtung der Gleichung 237

$$\left.\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} + (p_i - p_a)\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\frac{1}{z^2} \\ \sigma_z &= \frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} - (p_i - p_a)\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}\frac{1}{z^2} \end{aligned}\right\}. \quad 239)$$

Die Dehnungen ε_1, ε_2 und ε_3 in den drei Hauptrichtungen ergeben sich aus den Gleichungen 15 nach Einführung der Werthe σ_x (Gl. 237), σ_y und σ_z (Gl. 239) zu

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{m-2}{m}\alpha\frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2},\\
\varepsilon_2 &= \frac{m-2}{m}\alpha\frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{m+1}{m}\alpha\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}(p_i - p_a)\frac{1}{z^2},\\
\varepsilon_3 &= \frac{m-2}{m}\alpha\frac{p_i r_i^2 - p_a r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{m+1}{m}\alpha\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}(p_i - p_a)\frac{1}{z^2}.
\end{aligned}\right\} \quad 240)$$

2. Innerer Ueberdruck p_i ($p_a = 0$).

Die Gl. 240 ergeben unter Beachtung des in § 48, Ziff. 1 Erörterten die Materialanstrengung im Punkte P und zwar

in Richtung der Cylinderachse

$$\frac{\varepsilon_1}{\alpha} = \frac{m-2}{m}\frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}p_i = 0{,}4\frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}p_i,$$

in Richtung der Tangente (des Umfanges)

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon_2}{\alpha} &= \frac{m-2}{m}\frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}p_i + \frac{m+1}{m}\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}p_i\frac{1}{z^2}\\
&= 0{,}4\frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}p_i + 1{,}3\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}p_i\frac{1}{z^2},
\end{aligned}$$

in Richtung des Halbmessers

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon_3}{\alpha} &= \frac{m-2}{m}\frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}p_i - \frac{m+1}{m}\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}p_i\frac{1}{z^2}\\
&= 0{,}4\frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}p_i - 1{,}3\frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}p_i\frac{1}{z^2},
\end{aligned}$$

} 241)

sofern noch jeweils $m = \frac{10}{3}$ gesetzt wird.

Die Zuganstrengung $-\frac{\varepsilon_1}{\alpha}$ in Richtung der Achse tritt vollständig hinter die Zuginanspruchnahme $\frac{\varepsilon_2}{\alpha}$, welche im Sinne des Umfanges statthat, zurück, so dass sie nicht weiter in Betracht gezogen zu werden braucht. $\frac{\varepsilon_2}{\alpha}$ und $\frac{\varepsilon_3}{\alpha}$ erlangen die grössten Werthe für $z = r_i$, d. h. an der Innenfläche des Hohlcylinders. Somit wird mit k_z als zulässiger Zug- und k als zulässiger Druckanstrengung

$$\left.\begin{aligned} \max\left(\frac{\varepsilon_2}{\alpha}\right) &= \frac{(m+1)\,r_a^2+(m-2)\,r_i^2}{m\,(r_a^2-r_i^2)}\,p_i = \frac{1{,}3\,r_a^2+0{,}4\,r_i^2}{r_a^2-r_i^3}\,p_i \leqq k_z, \\ \max\left(-\frac{\varepsilon_3}{\alpha}\right) &= \frac{(m+1)\,r_a^2-(m-2)\,r_i^2}{m\,(r_a^2-r_i^2)}\,p_i = \frac{1{,}3\,r_a^2-0{,}4\,r_i^2}{r_a^2-r_i^2}\,p_i \leqq k. \end{aligned}\right\} 242)$$

Die Zuganstrengung $\max\left(\frac{\varepsilon_2}{\alpha}\right)$ in Richtung des Umfanges, d. i. in tangentialer Richtung, ist der grössere, also der bestimmende Werth. Hiernach findet sich als massgebende Beziehung

$$k_z \geqq \frac{\frac{m+1}{m}\,r_a^2+\frac{m-2}{m}\,r_i^2}{r_a^2-r_i^2}\,p_i = \frac{1{,}3\,r_a^2+0{,}4\,r_i^2}{r_a^2-r_i^2}\,p_i, \quad 243)$$

oder

$$r_a \geqq r_i\sqrt{\frac{k_z+\left(1-\frac{2}{m}\right)p_i}{k_z-\left(1+\frac{1}{m}\right)p_i}} = r_i\sqrt{\frac{k_z+0{,}4\,p_i}{k_z-1{,}3\,p_i}}. \quad 244^1)$$

[1]) Zur Entwicklung dieser Beziehung in der Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure 1880, S. 283 u. f. war Verfasser durch die Beobachtung veranlasst worden, dass Schläuche, welche zum Zwecke der Prüfung innerem Ueberdruck ausgesetzt wurden, sich verlängern, während die Grundlage der von Grashof in seiner Theorie der Elasticität und Festigkeit 1878, S. 312, für die Berechnung von Hohlcylindern entwickelten Gleichung

Für $1{,}3\,p_i = k_z$ wird $r_a = \infty$, gleichgiltig wie klein auch der innere Durchmesser sein mag, sofern er nur grösser als Null ist. Da nun der zulässigen Anstrengung k_z für jedes Material eine unüberschreitbare Grenze gezogen ist, so folgt hieraus, dass nur solche Verhältnisse möglich sind, für welche

$$p_i < \frac{k_z}{1{,}3},$$

oder allgemein

$$p_i < \frac{m+1}{m} k_z.$$

(Vergl. hierzu Fussbemerkung S. 371.)

$$r_a = r_i \sqrt{\frac{m\,k_z + (m-1)\,p_i}{m\,k_z - (m+1)\,p_i}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 245)$$

und mit $m = \frac{10}{3}$

$$r_a = r_i \sqrt{\frac{k_z + 0{,}7\,p_i}{k_z - 1{,}3\,p_i}},$$

welche dem Verfasser bis dahin als die zutreffendste erschienen war, infolge der Vernachlässigung der Achsialkraft $\pi r_i^2 p_i$ nicht eine Verlängerung, sondern eine Verkürzung des Hohlcylinders ergiebt, indem für die Dehnung ε_x in Richtung der Cylinderachse ein negativer Werth gefunden wird. (S. am angegebenen Ort in No. 199 den Ausdruck für $E\varepsilon_x$, vergl. Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure 1880, S. 288 und 290.)

Die Beziehung 245 wurde in der Form

$$\delta = r_a - r_i = r_i \left(-1 + \sqrt{\frac{m\,k_z + (m-1)\,p_i}{m\,k_z - (m+1)\,p_i}} \right)$$

auch als Winkler'sche Gleichung bezeichnet (Hütte, des Ingenieurs Taschenbuch bis zur letzten Auflage 1897, S. 240, v. Reiche, die Maschinenfabrikation 1876, S. 37, wobei mit $m = 3$ gesetzt ist

$$\delta = r_i \sqrt{\frac{3\,k_z + 2\,p_i}{3\,k_z - 4\,p_i}} - r_i,$$

u. A.). Verfasser, welcher gelegentlich der Abfassung dieses Buches (1889) die Winkler'sche Arbeit über cylindrische Gefässe im Civilingenieur 1860 erstmals durchgesehen hat, fand bei dieser Gelegenheit, dass Winkler bereits damals nicht blos die Beziehung 245 aufgestellt hatte, sondern auch eine weitere Gleichung, welche die erwähnte Achsialkraft berücksichtigte (S. 348 und 349 daselbst) und die sich von Gleichung 244 nur durch den mit 4 etwas zu gross gewählten Werth von m unterscheidet.

Dass es durch fortgesetzte Vergrösserung der Wandstärke nicht möglich sein soll, die Flüssigkeitspressung über eine gewisse Höhe hinaus zu steigern, kann für den ersten Augenblick überraschen, erklärt sich jedoch durch die Ungleichmässigkeit der Vertheilung der Anstrengung über den Wandungsquerschnitt.

Denken wir uns beispielsweise einen Hohlcylinder aus Gussstahl mit den Durchmessern

$$2r_i = 80 \text{ mm}, \qquad 2r_a = 200 \text{ mm},$$

der Wandstärke

$$r_a - r_i = 100 - 40 = 60 \text{ mm}$$

hergestellt und einem inneren Ueberdruck von 1200 kg auf das Quadratcentimeter ausgesetzt. Dann ergiebt sich nach der zweiten der Gleichungen 241 die tangentiale Anstrengung (Zug)[1])

a) an der Innenfläche, d. h. für $z = 4$ cm,

$$0{,}4\,\frac{4^2}{10^2 - 4^2}\,1200 + 1{,}3\,\frac{10^2 \cdot 4^2}{10^2 - 4^2} \cdot 1200\,\frac{1}{4^2} = \sim 1950 \text{ kg};$$

b) in der Mitte, d. h. für $z = 7$ cm,

$$0{,}4\,\frac{4^2}{10^2 - 4^2}\,1200 + 1{,}3\,\frac{10^2 \cdot 4^2}{10^2 - 4^2} \cdot 1200\,\frac{1}{7^2} = \sim 700 \text{ kg};$$

c) an der Aussenfläche, d. h. für $z = 10$ cm,

$$0{,}4\,\frac{4^2}{10^2 - 4^2}\,1200 + 1{,}3\,\frac{10^2 \cdot 4^2}{10^2 - 4^2} \cdot 1200\,\frac{1}{10^2} = \sim 390 \text{ kg}.$$

---

[1]) Die radiale Anstrengung (Druck) beträgt an der Innenfläche nach der zweiten der Gleichungen 242

$$\max\left(-\frac{\varepsilon_3}{\alpha}\right) = \frac{1{,}3 \cdot 10^2 - 0{,}4^2 \cdot 4^2}{10^2 - 4^2} \cdot 1200 = 1766 \text{ kg},$$

und die achsiale Anstrengung (Zug) nach der ersten der 3 Gleichungen 241

$$\frac{\varepsilon_1}{\alpha} = 0{,}4\,\frac{4^2}{10^2 - 4^2} \cdot 1200 = 91 \text{ kg}.$$

In Fig. 184 ist der Verlauf der Inanspruchnahme dargestellt.

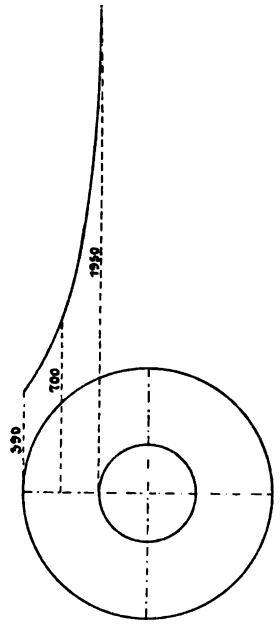


Fig. 184.

Die Anstrengung beträgt hiernach aussen nur den fünften Theil derjenigen an der Innenfläche. Da die letztere massgebend ist, so wird das nach aussen gelegene Material sehr schlecht ausgenützt[1]).

Vergrössern wir die Wandstärke fortgesetzt, bis schliesslich in der Gleichung

---

[1]) Wenn es sich um ein Material handelt mit derart veränderlichem Dehnungskoefficienten, dass derselbe bei wachsender Spannung zunimmt, so dass also der Stoff um so nachgiebiger ist, je stärker er angestrengt wird, wie dies z. B. bei Gusseisen zutrifft, so zeigt sich diese Ungleichmässigkeit nicht in dem hohen Grade: an der Innenfläche fällt die Anstrengung geringer, an der Aussenfläche grösser aus, als die vorstehenden Gleichungen, welche Unveränderlichkeit des Dehnungskoefficienten und des Werthes m zur Voraussetzung haben, erwarten lassen. Bei Gusseisen kommt andererseits wieder der in § 22, Ziff. 3, festgestellte Einfluss der Gusshaut hinzu. Ist diese, geringere Nachgiebigkeit besitzende Schicht an der Innenfläche vorhanden, so muss sie die Festigkeit vermindernd wirken. Durch Bearbeitung der Innenfläche — vorausgesetzt, dass die

$$k_z = -\frac{1{,}3\, r_a^2 + 0{,}4\, r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p_i = \frac{1{,}3 + 0{,}4 \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2}{1 - \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2} p_i$$

$\left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2$ Null gesetzt werden darf, so ist $k_z = 1{,}3\, p_i$, unter welche Anstrengung also nicht zu gelangen ist, wie oben bereits festgestellt.

Die erkannte Unvollständigkeit der Ausnützung der Widerstandsfähigkeit des Materials, welche um so bedeutender ist, je grösser die Wandstärke, hat zur Konstruktion von zusammengesetzten Hohlcylindern (Ringgeschützen u. s. w.) geführt, deren Wesen sich aus Folgendem ergiebt.

Wir denken uns den Hohlcylinder des soeben behandelten Beispiels aus zwei Hohlcylindern bestehend:

einem inneren, für welchen $r_i = 40$ mm, $r_a = 70$ mm,
„ äusseren, „ „ $r_i = 70$ „ $r_a = 100$ „

Der äussere Cylinder sei auf den inneren (warm oder in anderer Weise) so aufgezogen, dass dieser zusammengepresst wird; infolge dessen tritt bei dem inneren Cylinder eine nach innen wachsende Druckspannung auf. Wenn nun jetzt die gepresste Flüssigkeit (Arbeitsflüssigkeit) den inneren Cylinder belastet, so fällt hier die Zuganstrengung um den Betrag geringer aus, welcher der Druckanstrengung entspricht, die durch das Aufziehen des äusseren Cylinders mit Pressung wachgerufen worden war. Dagegen ergiebt sich die Zuganstrengung des äusseren Cylinders um denjenigen Betrag grösser, welcher von dem Aufziehen auf den inneren herrührte. Zweckmässigerweise wird man bei solchen, aus mehreren Hohlcylindern zusammengesetzten Cylindern dahin streben müssen, dass die Spannungen an den Innenflächen der einzelnen

---

Rücksicht auf das Dichthalten gegenüber der Flüssigkeit das Ausbohren gestattet — würde die Widerstandsfähigkeit unter sonst gleichen Verhältnissen erhöht werden können.

(Vergl. in § 56 das unter b) und c) Gesagte.)

Der Einfluss der etwaigen Veränderlichkeit von m ist von keiner grossen Bedeutung.

Cylinder unter Einwirkung der Flüssigkeitspressung gleich gross ausfallen.

Für im Verhältniss zum Halbmesser geringe Wandstärke $s = r_a - r_i$ kann mit genügender Annäherung gleichmässige Vertheilung der Spannungen über den Wandungsquerschnitt angenommen werden. Dies giebt für den l langen Hohlcylinder

$$2 r_i l p_i \leqq 2 s l k_z,$$

woraus

$$k_z \geqq p_i \frac{r_i}{s} \qquad \text{oder} \qquad s \geqq r_i \frac{p_i}{k_z}. \quad . \quad . \quad 246)$$

Aus der allgemeinen Gleichung 244 lässt sich diese Beziehung in folgender Weise ableiten.

Mit $m = \infty$ (d. h. die Zusammenziehung, welche ein in Richtung seiner Achse gezogener Stab senkrecht zu dieser erfährt, wird vernachlässigt) folgt zunächst

$$r_a = r_i \sqrt{\frac{k_z + p_i}{k_z - p_i}} = r_i \sqrt{1 + 2 \frac{p_i}{k_z - p_i}}.$$

Unter Beachtung, dass bei geringer Wandstärke p_i nur einen kleinen Bruchtheil von k_z bildet,

$$r_a = \sim r_i \sqrt{1 + 2 \frac{p_i}{k_z}} = \sim r_i \left(1 + \frac{p_i}{k_z}\right),$$

$$r_a - r_i = s = r_i \frac{p_i}{k_z},$$

wie oben unmittelbar entwickelt wurde.

Die Spannung σ, welche in dem senkrecht zur Achse gelegenen Querschnitt

$$\pi (r_a^2 - r_i^2)$$

des Hohlcylinders eintritt, findet sich aus

$$\pi r_i^2 p_i = \pi (r_a^2 - r_i^2) \sigma$$

zu

$$\sigma = p_i \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} = p_i \frac{r_i}{\frac{r_a + r_i}{r_i}(r_a - r_i)} = \sim \frac{1}{2} p_i \frac{r_i}{s},$$

d. h. halb so gross als die Anstrengung (nach Gl. 246) in Richtung des Umfanges.

3. Aeusserer Ueberdruck p_a ($p_i = 0$).

Wenn Flachdrücken oder Einbeulen der Wandung und bei grosser Länge ausserdem die in § 23 besprochene Knickung nicht zu erwarten steht, sind die Anstrengungen nach den Gleichungen 240 mit $p_i = 0$ zu berechnen. Dieselben gehen dann über in

$$\varepsilon_1 = -\frac{m-2}{m} \alpha \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} p_a,$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{m-2}{m} \alpha \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} p_a - \frac{m+1}{m} \alpha \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p_a \frac{1}{z^2},$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{m-2}{m} \alpha \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} p_a + \frac{m+1}{m} \alpha \frac{r_a^2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} p_a \frac{1}{z^2}.$$

Den grössten Werth erlangen die Anstrengungen $\frac{\varepsilon_2}{\alpha}$ und $\frac{\varepsilon_3}{\alpha}$ — die Inanspruchnahme $\frac{\varepsilon_1}{\alpha}$ kommt als wesentlich kleiner, wie die gleichzeitige Anstrengung $-\frac{\varepsilon_2}{\alpha}$ nicht weiter in Betracht — auch hier wieder für das kleinste z, d. h. für die Innenfläche und zwar

in Richtung der Tangente (des Umfanges)

$$\max\left(-\frac{\varepsilon_2}{\alpha}\right) = \frac{2m-1}{m} \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} p_a = 1{,}7 \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} p_a,$$

in Richtung des Halbmessers

$$\max\left(\frac{\varepsilon_3}{\alpha}\right) = \frac{3}{m} \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} p_a = 0{,}9 \frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} p_a, \qquad (247)$$

sofern noch $m = \frac{10}{3}$ eingeführt wird. Hiernach

$$\left.\begin{aligned} k \geqq 1{,}7\,\frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}\,p_a \quad &\text{oder} \quad r_a = \frac{r_i}{\sqrt{1 - 1{,}7\,\frac{p_a}{k}}}, \\ k_z \geqq 0{,}9\,\frac{r_a^2}{r_a^2 - r_i^2}\,p_a \quad &\text{oder} \quad r_a = \frac{r_i}{\sqrt{1 - 0{,}9\,\frac{p_a}{k_z}}}. \end{aligned}\right\} \quad 248)$$

Auch hier gilt die zur Gl. 244 gemachte Bemerkung, dass nur solche Verhältnisse möglich sind, für welche

$$p_a < \frac{k}{1{,}7} \quad \text{bezw.} \quad p_a < \frac{k_z}{0{,}9}.$$

(Vergl. das unter Ziffer 2, S. 371 über den Einfluss der Veränderlichkeit des Dehnungskoefficienten Bemerkte.)

Für verhältnissmässig geringe Wandstärke $s = r_a - r_i$ findet sich unter den oben ausgesprochenen Voraussetzungen und auf dem gleichen Wege, welcher zur Beziehung 246 führte

$$k \geqq p_a \frac{r_a}{s} \quad \text{oder} \quad s \geqq r_a \frac{p_a}{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 249)$$

Bei den Entwicklungen dieses Paragraphen blieb der etwaige, die Festigkeit des Cylindermantels unterstützende Einfluss der Cylinderböden (und zutreffendenfalls der Quernähte) unberücksichtigt. Je kürzer der Cylinder im Vergleiche zum Durchmesser ist, um so bedeutender wird unter sonst gleichen Verhältnissen dieser Einfluss sein; je grösser die Länge, um so mehr wird er verschwinden. In der Mehrzahl der Fälle tritt er in den Hintergrund; wo dies nicht zutrifft, kann seine Berücksichtigung schätzungsweise unter Beachtung der Verhältnisse des gerade vorliegenden Sonderfalles dadurch erfolgen, dass die zulässige Anstrengung des Materials entsprechend höher in die Rechnung eingeführt wird.

Wenn der Hohlcylinder nicht aus dem Ganzen besteht, sondern aus einzelnen Theilen hergestellt wurde, die durch Nietung oder in anderer Weise verbunden sind, so wird die Widerstandsfähigkeit der Verbindung in Betracht zu ziehen sein.

Die Ermittlung der Wandstärken solcher Hohlcylinder, bei welchen unter Einwirkung des äusseren Ueberdruckes ein Flachdrücken (Einknicken, Einbeulen) der Wandung zu befürchten steht, gehört bei dem derzeitigen Stand dieser Aufgabe, sowie in Anbetracht der besonderen Einflüsse, welche dabei zu berücksichtigen sind, an diejenigen Stellen, wo die betreffenden Gegenstände, zu denen solche Hohlcylinder gehören, behandelt werden[1]).

§ 59. Hohlkugel.

Mit den Bezeichnungen

r_i der innere Halbmesser der Hohlkugel,
r_a „ äussere „ „ „
k_z die zulässige Zuganstrengung,
k „ „ Druckanstrengung

finden sich auf demselben Wege, welcher in § 58 eingeschlagen worden ist, und für $m = \frac{10}{3}$ die folgenden Beziehungen.

I. Innerer Ueberdruck p_i.

Die grösste Anstrengung tritt auch hier an der Innenfläche ein:

in Richtung der Tangente (des Umfanges)

$$k_z \geq \frac{\frac{m+1}{2m} r_a^3 + \frac{m-2}{m} r_i^3}{r_a^3 - r_i^3} p_i = \frac{0{,}65\, r_a^3 + 0{,}4\, r_i^3}{r_a^3 - r_i^3} p_i,$$

in Richtung des Halbmessers

$$k \geq \frac{\frac{m+1}{m} r_a^3 - \frac{m-2}{m} r_i^3}{r_a^3 - r_i^3} p_i = \frac{1{,}3\, r_a^3 - 0{,}4\, r_i^3}{r_a^3 - r_i^3} p_i. \qquad 250)$$

[1]) Ueber die Berechnung der äusserem Ueberdrucke ausgesetzten Flammrohre von Dampfkesseln findet sich Näheres in des Verfassers Maschinenelementen 1891/92, S. 147 u. f., 1894, S. 153 u. f.

Naturgemäss sind in denselben nur solche Verhältnisse möglich, für welche sich endliche Werthe von r_a ergeben.

Für im Verhältniss zum Halbmesser geringe Wandstärke $s = r_a - r_i$ ergiebt die aus

$$\pi r_i^2 p_i \leqq \sim k_z 2 \pi r_i s$$

folgende Beziehung

$$k_z \geqq \frac{1}{2} p_i \frac{r_i}{s} \quad \text{oder} \quad s = \frac{1}{2} r_i \frac{p_i}{k_z} \quad . \quad . \quad . \quad 251)$$

die Anstrengung, bezw. Wandstärke genügend genau.

2. Aeusserer Ueberdruck p_a ($p_i = 0$).

Sofern Einknicken (Einbeulen) der Wandung nicht zu befürchten steht, gilt für die Anstrengung, die auch hier wieder an der Innenfläche den Grösswerth erreicht:

in Richtung der Tangente (des Umfanges)

$$k \geqq \frac{3(m-1)}{2m} \frac{r_a^3}{r_a^3 - r_i^3} p_a = 1{,}05 \frac{r_a^3}{r_a^3 - r_i^3} p_a,$$

in Richtung des Halbmessers

$$k_z \geqq \frac{3}{m} \frac{r_a^3}{r_a^3 - r_i^3} p_a = 0{,}9 \frac{r_a^3}{r_a^3 - r_i^3} p_a. \qquad 252)$$

Für verhältnissmässig geringe Wandstärke, wie oben

$$k \geqq \frac{1}{2} p_a \frac{r_a}{s} \quad \text{oder} \quad s = \frac{1}{2} r_a \frac{p_a}{k} \quad . \quad . \quad . \quad 253)$$

Die zwei letzten Sätze von § 58 sind auch sinngemäss auf die Hohlkugel zu übertragen und demgemäss zu beachten.

Siebenter Abschnitt.

Plattenförmige Körper.

Die Erörterung der Widerstandsfähigkeit ebener Platten und Wandungen gegenüber einer gleichförmigen Belastung, insbesondere durch Flüssigkeitsdruck, oder gegenüber senkrecht zu ihnen wirkenden Einzelkräften führt auf eine der schwächsten Stellen der Elasticitäts- und Festigkeitslehre.

Eine ziemlich streng wissenschaftliche Ableitung der Inanspruchnahme, welche die am Umfange gestützte oder eingespannte Platte bei der bezeichneten Belastung erfährt, ist nach Wissen des Verfassers nur für den Fall der ebenen kreisförmigen Platte, der Scheibe, unter gewissen Voraussetzungen gegeben worden, die übrigens in den meisten Fällen zu einem erheblichen Theile mit den thatsächlichen Verhältnissen in Widerspruch stehen, wie später näher auszuführen sein wird (§ 60, Ziff. 2).

Für die elliptische Platte fehlte es trotz ihres häufigen Vorkommens als Mannlochdeckel u. s. w. überhaupt an einer Beziehung zwischen der Flüssigkeitspressung, den Abmessungen und der Materialanstrengung.

Die zur Bestimmung der Inanspruchnahme rechteckiger Platten vorliegenden Angaben beruhen auf Entwicklungen, die zwar zunächst den streng wissenschaftlichen Weg einschlagen, sich jedoch im Verlaufe der Rechnung zu vereinfachenden Annahmen gezwungen sehen, welche die Zuverlässigkeit der Ergebnisse beeinträchtigen. Ueberdies muss von wesentlichen der gemachten Voraussetzungen das Gleiche gesagt werden, was in dieser Hinsicht bei der kreisförmigen Platte bemerkt wurde. Der zur Lösung der Aufgabe nöthige Aufwand an mathematischen Hülfsmitteln ist trotzdem und ganz abgesehen von der Umfänglichkeit der Rechnungen ein sehr bedeutender und geht recht erheblich über das Mass hinaus, welches dem zwar wissenschaftlich gebildeten, jedoch mitten

in der Ausführung stehenden Ingenieur durchschnittlich noch geläufig ist.

Auf andere als ebene Platten erstrecken sich diese Betrachtungen überhaupt nicht, also nicht auf Deckel von den Formen, wie sie z. B. die Figuren 185 bis 189 wiedergeben. Querschnitte

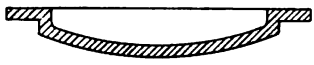


Fig. 185.

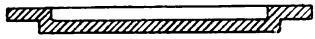


Fig. 186.

Fig. 187.

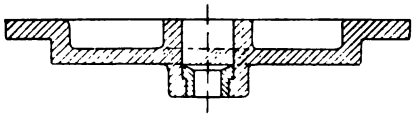


Fig. 188.

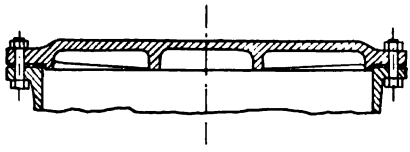


Fig. 189.

dieser Art aber sind bei den in der Wirklichkeit vorkommenden Deckeln u. dergl. weit häufiger zu finden, als das einfache Rechteck.

Unter diesen Umständen erscheint die Sicherheit, mit welcher der Konstrukteur die Inanspruchnahme von Platten und Wandungen der in Frage stehenden Art thatsächlich feststellen kann, durchschnittlich recht gering; in nicht wenigen Fällen kann überhaupt nicht von einer Sicherheit, sondern es muss vielmehr von einer Unsicherheit gesprochen werden, welche bezüglich der Widerstandsfähigkeit solcher Konstruktionstheile besteht. Dieser Zustand musste um so drückender empfunden werden, als auf manchen Gebieten des Maschineningenieurwesens (Dampfkessel-, Dampfmaschinenbau u. s. w.) Aufgaben der in Frage stehenden Art sich sehr häufig zu bieten und hier überdies eine hohe, auch auf Menschenleben sich erstreckende Verantwortlichkeit einzuschliessen pflegen.

Bei dieser Sachlage hat sich Verfasser zur Befriedigung der vorliegenden überaus dringlichen Bedürfnisse veranlasst gesehen, einen Näherungsweg einzuschlagen, wie er sich aus dem Späteren (§ 60, Ziff. 4, § 61, § 62, § 63) ergeben wird.

§ 60. Ebene kreisförmige Platte (Scheibe).

I. Ermittlung der Anstrengung auf dem Wege der Rechnung.

Die Behandlung dieser Aufgabe ist 1860 von Winkler und 1866 von Grashof der Oeffentlichkeit übergeben worden. Der Gang der Entwicklungen ist bei Beiden im Wesentlichen derselbe. Die folgenden Rechnungen geben die Lösung wieder, wie sie sich in Grashof's Theorie der Elasticität und Festigkeit 1878, S. 329 u. f. findet.

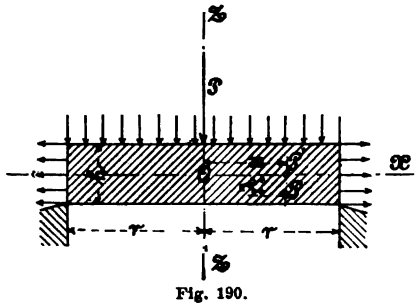


Fig. 190.

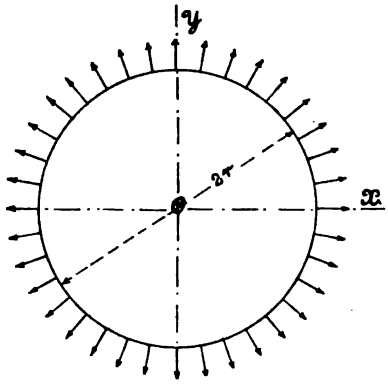


Fig. 191.

Die Scheibe von der Stärke h wird aufgefasst als am Umfange vom Halbmesser r frei aufliegend, wie in Fig. 190 dargestellt, oder als daselbst eingespannt, wie Fig. 192 wiedergiebt, und in Bezug auf ihre Belastung angenommen, dass diese im Allgemeinen bestehe

aus einer Einzelkraft P, welche im Mittelpunkte angreifend senkrecht zur Oberfläche gerichtet ist,

aus einem gleichmässig über die Oberfläche πr^2 vertheilten Normaldruck von der Grösse p auf die Flächeneinheit, und

aus einer auf die kreiscylindrische Mantelfläche $2\pi r h$ gleichmässig vertheilten, radial auswärts wirkenden Kraft, deren Grösse p_1 auf die Flächeneinheit beträgt.

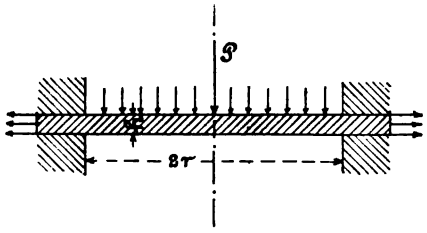


Fig. 192.

Die Scheibe, welche zunächst noch nicht belastet sei, denkt man sich auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, dessen x- und y-Achse in der Mittelebene liegen, während die z-Achse senkrecht dazu (positiv nach unten) gerichtet ist (Fig. 190 und 191). Der in der xz-Ebene gelegene beliebige Punkt P der Scheibe er-

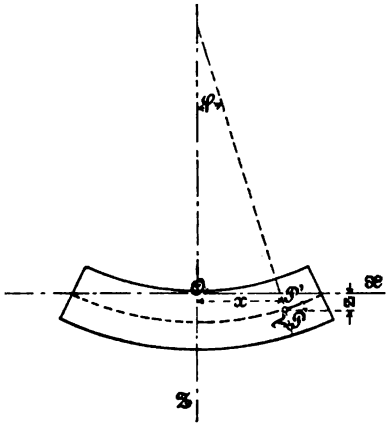


Fig. 193.

scheint durch die Abscisse x und den Abstand λ von der ursprünglich ebenen Mittelfläche bestimmt. Unter Einwirkung der Belastung geht die Letztere in eine Rotationsfläche über (Fig. 193), deren Meridianlinie durch die Koordinaten x und z festgelegt wird.

Werden nun für den in Betracht gezogenen Punkt P bezeichnet

mit σ_x die Normalspannung und mit ε_x die Dehnung in Richtung der x-Achse,

mit σ_y die Normalspannung und mit ε_y die Dehnung in Richtung der y-Achse,

mit σ_z die Normalspannung und mit ε_z die Dehnung in Richtung der z-Achse,

so ergeben sich auf demselben Wege, auf welchem die Beziehungen 233, S. 363 gefunden wurden, die Werthe

$$\sigma_x = \frac{2}{\beta}\left(\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{m-2}\right),$$

$$\sigma_y = \frac{2}{\beta}\left(\varepsilon_y + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{m-2}\right),$$

$$\sigma_z = \frac{2}{\beta}\left(\varepsilon_z + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{m-2}\right).$$

Unter der Voraussetzung, dass die Stärke h der Scheibe gering ist gegenüber $2r$, kann die Spannung σ_z nur klein ausfallen im Vergleich zu σ_x und σ_y. Demgemäss vernachlässigt man σ_z, d. h. setzt

$$\varepsilon_z + \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{m-2} = 0,$$

woraus folgt

$$\varepsilon_z = -\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{m-1}$$

und erhält hiermit

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2}{(m-1)\beta}(m\,\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{2}{(m-1)\beta}(\varepsilon_x + m\,\varepsilon_y) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 254)$$

Bedeuten für den Punkt P' der Mittelfläche, welcher um x von der z-Achse absteht (Fig. 190, 193)

ε_x' und ε_y' die nach der Richtung der x-, bezw. y-Achse genommenen Dehnungen,

ϱ den Krümmungshalbmesser der Meridianlinie,

ϱ_1 „ „ „ Mittelfläche in dem dazu senkrechten Normalschnitt,

welche Radien als sehr gross gegenüber den Abmessungen der Scheibe vorausgesetzt werden,

so ist mit der Annäherung, mit welcher die für gerade stabförmige Körper ermittelte Gl. 33, S. 65 nach hier übertragen werden darf,

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x' + \frac{\lambda}{\varrho} \quad \text{und} \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y' + \frac{\lambda}{\varrho_1}.$$

Da nach S. 67

$$\frac{1}{\varrho} = \sim -\frac{d^2z}{dx^2}$$

und ferner ϱ_1 gleich der Länge der Normalen bis zum Durchschnitt mit der Achse der Rotationsfläche ist, d. h. unter Bezugnahme auf Fig. 193

$$\varrho_1 = \frac{x}{\sin\varphi} = \sim \frac{x}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{x}{-\frac{dz}{dx}},$$

$$\frac{1}{\varrho_1} = \sim -\frac{1}{x}\frac{dz}{dx},$$

so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x' - \lambda\frac{d^2z}{dx^2} \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y' - \frac{\lambda}{x}\frac{dz}{dx} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 255)$$

und nach Einführung dieser Werthe in die Gleichungen 254

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{m}{(m^2-1)\,\alpha}\left\{m\,\varepsilon_x' + \varepsilon_y' - \lambda\left(m\,\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{dz}{dx}\right)\right\}\\ \sigma_y &= \frac{m}{(m^2-1)\,\alpha}\left\{\varepsilon_x' + m\,\varepsilon_y' - \lambda\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{m}{x}\,\frac{dz}{dx}\right)\right\}\end{aligned}\right\}. \quad 256)$$

Die Spannungen σ_x' und σ_y' in dem Punkte P' der Mittelfläche, welche sich aus den Gl. 256 für $\lambda = 0$ ergeben, rühren — unter den gemachten Voraussetzungen — nur von der Spannung p_1 am Umfangsmantel der Scheibe her, somit

$$\sigma_x' = \sigma_y' = p_1$$

und infolge dessen auch aus den Gl. 256 mit $\lambda = 0$

$$\sigma_x' = \frac{m}{(m^2-1)\,\alpha}\left\{m\,\varepsilon_x' + \varepsilon_y'\right\} = p_1$$

$$\sigma_y' = \frac{m}{(m^2-1)\,\alpha}\left\{\varepsilon_x' + m\,\varepsilon_y'\right\} = p_1,$$

folglich

$$\varepsilon_x' = \varepsilon_y' = \alpha\,\frac{m-1}{m}\,p_1.$$

Hiermit liefern die Gl. 255

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \alpha\,p_1\,\frac{m-1}{m} - \lambda\,\frac{d^2z}{dx^2}\\ \varepsilon_y &= \alpha\,p_1\,\frac{m-1}{m} - \frac{\lambda}{x}\,\frac{dz}{dx}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 255a)$$

und die Gl. 256

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= p_1 - \frac{m}{(m^2-1)\,\alpha}\,\lambda\left(m\,\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{dz}{dx}\right)\\ \sigma_y &= p_1 - \frac{m}{(m^2-1)\,\alpha}\,\lambda\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{m}{x}\,\frac{dz}{dx}\right)\end{aligned}\right\}. \quad 257)$$

Vom Punkte P ausgehend denkt man sich ein Körperelement, Fig. 194, mit den Querschnittsabmessungen dx und $d\lambda$ konstruirt

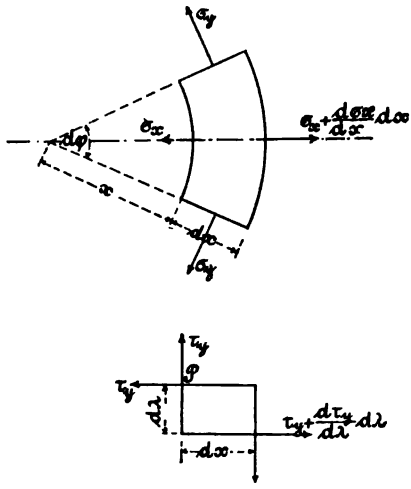


Fig. 194.

und herausgeschnitten, sodann die auf dasselbe wirkenden Spannungen eingetragen, wobei zu berücksichtigen ist, dass Schubspannungen nur da auftreten können, wo Winkeländerungen (Gleitungen) stattfinden, und die Gleichgewichtsbedingung

$$\sigma_x\, x\, d\varphi\, d\lambda + 2\,\sigma_y \sin\frac{d\varphi}{2}\, d\lambda\, dx + \tau_y \left(x + \frac{dx}{2}\right) d\varphi\, dx$$

$$- \left(\sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx}\, dx\right)(x + dx)\, d\varphi\, d\lambda - \left(\tau_y + \frac{d\tau_y}{d\lambda}\, d\lambda\right)\left(x + \frac{dx}{2}\right) d\varphi\, dx = 0$$

aufgestellt. Aus derselben folgt

$$\sigma_y - \sigma_x - x\,\frac{d\sigma_x}{dx} - x\,\frac{d\tau_y}{d\lambda} = 0,$$

$$\frac{d\tau_y}{d\lambda} = \frac{\sigma_y}{x} - \frac{\sigma_x + x\,\dfrac{d\sigma_x}{dx}}{x} = \frac{\sigma_y}{x} - \frac{1}{x}\,\frac{d\,(x\,\sigma_y)}{dx},$$

Nach Einführung der Gl. 257

$$\frac{d\tau_y}{d\lambda} = \frac{1}{x}\left[p_1 - \frac{m}{m^2-1}\frac{1}{\alpha}\lambda\left(\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{m}{x}\frac{dz}{dx}\right) - p_1\right.$$

$$\left. + \frac{m}{m^2-1}\frac{1}{\alpha}\lambda\left(mx\frac{d^3z}{dx^3} + m\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^3z}{dx^2}\right)\right],$$

$$\frac{d\tau_y}{d\lambda} = \frac{m^2}{m^2-1}\frac{1}{\alpha}\lambda\left(\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{x}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dz}{dx}\right)$$

und durch Integration in Bezug auf die Veränderliche λ

$$\tau_y = \frac{m^2}{m^2-1}\frac{1}{\alpha}\frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{x}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dz}{dx}\right) + C.$$

Die Konstante C ist bestimmt dadurch, dass für $\lambda = \pm\frac{h}{2}$ die Schubspannung $\tau_y = 0$, somit

$$\tau_y = -\frac{m^2}{m^2-1}\frac{1}{\alpha}\frac{h^2-4\lambda^2}{8}\left(\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{x}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dz}{dx}\right). \quad 258)$$

Das Vorzeichen von τ deutet an, dass der ursprünglich rechte Winkel, an dessen Kanten in Fig. 194 die Schubspannungen eingetragen sind, in einen stumpfen übergeht, diese also nicht in den eingezeichneten, sondern in den entgegengesetzten Richtungen wirken.

Um z als Funktion von x zu erhalten, denkt man sich eine Scheibe vom Halbmesser x, Fig. 195, herausgetrennt. Auf dieselbe wirkt in Richtung der Scheibenachse die Belastung $P + \pi r^2 p$, welche durch die Schubkräfte übertragen werden muss; somit

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_y \cdot 2\pi x\, d\lambda = P + \pi r^2 p,$$

wobei die Integration lediglich in Bezug auf λ zu erfolgen hat. Nach Einführung des absoluten Werthes von τ_y aus Gl. 258 ergiebt sich

$$2\pi x \frac{m^2}{m^2-1}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{1}{x}\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{1}{x^2}\frac{dz}{dx}\right)\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}\frac{h^2-4\lambda^2}{8}d\lambda$$

$$= P + \pi r^2 p$$

und somit in

$$\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{1}{x}\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{1}{x^2}\frac{dz}{dx}=6\frac{m^2-1}{m^2}\alpha\frac{1}{h^3}\left(px+\frac{P}{\pi x}\right) \quad 259)$$

die Differentialgleichung der Meridianlinie.

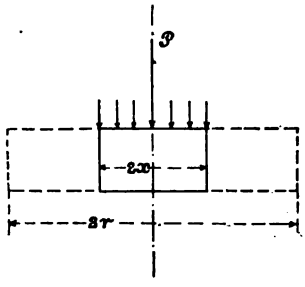


Fig. 195.

Die Einsetzung des Ausdrucks auf der rechten Seite dieser Gleichung in Gl. 258 ergiebt für die absolute Grösse der Schubspannung

$$\tau_y = \frac{3}{4}\frac{h^2-4\lambda^2}{h^3}\left(px+\frac{P}{\pi x}\right). \quad . \quad . \quad 260)$$

Mit den abgekürzten Bezeichnungen

$$\frac{m^2-1}{m^2}\alpha\frac{6}{h^3}p=a, \qquad \frac{m^2-1}{m^2}\alpha\frac{6}{h^3}\frac{P}{\pi}=b$$

geht Gl. 259 über in

$$\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{x}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dz}{dx} = a\,x + \frac{b}{x}$$

und da die linke Seite gleich

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dz}{dx}\right)\right\},$$

so ist auch

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dz}{dx}\right)\right\} = a\,x + \frac{b}{x},$$

woraus folgt

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dz}{dx}\right) = \frac{a}{2}x^2 + b\,ln\,x + c_1,$$

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{a}{8}x^4 + b\int x\,ln\,x\,dx + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2,$$

und wegen

$$\int x\,ln\,x\,dx = \frac{x^2}{4}(2\,ln\,x - 1)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a}{8}x^3 + \frac{b}{4}x(2\,ln\,x - 1) + \frac{c_1}{2}x + \frac{c_2}{x^2}. \qquad 261)$$

Somit

$$z = \frac{a}{32}x^4 + \frac{b}{4}x^2(ln\,x - 1) + \frac{c_1}{4}x^2 + c_2\,ln\,x + c_3. \quad 262)$$

Hiernach finden sich für die in den Gl. 257 auftretenden Werthe

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{x}\frac{dz}{dx} &= \frac{a}{8}x^2 + \frac{b}{4}(2\,ln\,x - 1) + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{x^2},\\ \frac{d^2z}{dx^2} &= \frac{3}{8}a\,x^2 + \frac{b}{4}(2\,ln\,x + 1) + \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{x^2}\end{aligned}\right\}. \quad 263)$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten ist zunächst zu beachten, dass für $x = 0$ auch $\frac{dz}{dx} = 0$, d. h. dass die Tangente an der Meridianlinie im Scheitel derselben wagrecht sein muss, also nach Gl. 261

$$0 = \frac{b}{2}(x \ln x) + \frac{c_2}{x} \qquad \text{für } x = 0.$$

Da

$$x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

und dieser Werth für $x = 0$ zu $\frac{\infty}{\infty}$ wird, so ist der erste Differentialquotient zu bilden:

$$\frac{b}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)_{x=0} = \frac{b}{2}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right)_{x=0} = \frac{b}{2}(x)_{x=0} = 0.$$

Hiermit

$$0 = 0 + \left(\frac{c_2}{x}\right)_{x=0},$$

was nur durch $c_2 = 0$ ermöglicht wird.

Ist die Scheibe am Rande nur gestützt, also lose aufliegend, so muss für alle Punkte des Umfangsmantels der Scheibe, d. h. für $x = r$ und für jeden möglichen Werth von λ $\sigma_x = p_1$ sein. Nach der ersten der Gleichungen 257 ist das nur möglich, wenn

$$m\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dx} = 0,$$

woraus nach Einführung der rechten Seiten der Gl. 263 folgt

$$c_1 = -\frac{1}{4}\frac{3m+1}{m+1}a r^2 - b\left(\ln r + \frac{1}{2}\frac{m-1}{m+1}\right). \qquad 264)$$

Ist die Scheibe am Rande eingespannt, sodass die x-Achse an der Befestigungsstelle Tangente an der Meridianlinie ist, Fig. 196,

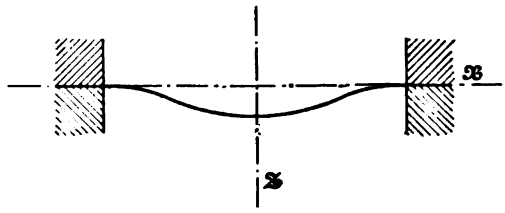


Fig. 196.

(vergl. hierüber auch § 53), so muss für $x = r$ $\frac{dz}{dx} = 0$ sein, somit nach Gl. 261, da $c_2 = 0$,

$$0 = \frac{a}{8} r^3 + \frac{b}{4} r (2 \ln r - 1) + \frac{c_1}{2} r,$$

$$c_1 = -\frac{a}{4} r^2 - b \left(\ln r - \frac{1}{2} \right). \quad . \quad . \quad . \quad 265)$$

a) Die Scheibe ist nur durch p gleichmässig belastet;

$$P = 0.$$

Mit $P = 0$ wird

$$b = \frac{m^2 - 1}{m^2} \alpha \frac{6}{h^3} \frac{P}{\pi} = 0.$$

Die Konstante c_3 der Gl. 262 bestimmt sich dadurch, dass für $x = r$ $z = 0$ sein muss, also, da $c_3 = 0$ (S. 389), aus

$$0 = \frac{a}{32} r^4 + \frac{c_1}{4} r^2 + c_3$$

zu

$$c_3 = -\frac{a}{32} r^4 - \frac{c_1}{4} r^2.$$

Damit geht die Gleichung 262 der Meridianlinie über in

$$z = -\frac{a}{32}(r^4 - x^4) - \frac{c_1}{4}(r^2 - x^2) = -\left(a\frac{r^2 + x^2}{8} + c_1\right)\frac{r^2 - x^2}{4} \quad 266)$$

α) Die Scheibe liegt am Rande lose auf.

Gl. 264 ergiebt mit $b = 0$

$$c_1 = -\frac{1}{4}\frac{3m + 1}{m + 1} a r^2.$$

Durch Einführung dieser Grösse und von

$$a = \frac{m^2 - 1}{m^2} \alpha \frac{6}{h^3} p$$

in Gleichung 266 liefert diese

$$z = \frac{3}{16}\frac{m^2 - 1}{m^2} \alpha \frac{p}{h^3}\left(\frac{5m + 1}{m + 1} r^2 - x^2\right)(r^2 - x^2). \quad 267)$$

Hieraus folgt die Durchbiegung in der Mitte für $x = 0$

$$z' = \frac{3}{16}\frac{(m - 1)(5m + 1)}{m^2} \alpha p \frac{r^4}{h^3} \quad \ldots \quad 268)$$

und mit $m = \frac{10}{3}$

$$z' = 0{,}7\, \alpha p \frac{r^4}{h^3}. \quad \ldots \quad 269)$$

Für $p_1 = 0$ gehen die Gl. 255a über in

$$\varepsilon_x = -\lambda \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{3}{4}\frac{m^2 - 1}{m^2} \alpha \frac{p}{h^3} \lambda \left(\frac{3m + 1}{m - 1} r^2 - 3x^2\right)$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\lambda}{x}\frac{dz}{dx} = \frac{3}{4}\frac{m^2 - 1}{m^2} \alpha \frac{p}{h^3} \lambda \left(\frac{3m + 1}{m + 1} r^2 0 \quad x^2\right).$$

Diese Dehnungen erlangen ihren grössten Werth für $x = 0$ (Mitte der Scheibe) und für $x = \pm \frac{h}{2}$ (äusserste Fasern). Diese Höchstwerthe sind überdies gleich gross, nämlich

$$\max(\varepsilon_r) = \frac{3}{8} \frac{(m-1)(3m+1)}{m^2} \alpha \left(\frac{r}{h}\right)^2 p = \max(\varepsilon_y).$$

An den bezeichneten Stellen sind die Schubspannungen nach Gl. 260 gleich Null, somit ist $\max\left(\frac{\varepsilon_r}{\alpha}\right)$ die grösste Anstrengung und demgemäss mit k_b als zulässiger Biegungsinanspruchnahme

$$k_b \geqq \frac{3}{8} \frac{(m-1)(3m+1)}{m^2} \left(\frac{r}{h}\right)^2 p. \quad . \quad . \quad 270)$$

Mit $m = \frac{10}{3}$ wird

$$k_b \geqq 0{,}87 \left(\frac{r}{h}\right)^2 p. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 271)$$

β) Die Scheibe ist am Umfange eingespannt.

Gl. 265 liefert mit $b = 0$

$$c_1 = -\frac{9}{4} r^2.$$

In ganz gleicher Weise, wie unter *α)*, ergiebt sich hier die Gleichung der Meridianlinie

$$z = \frac{3}{16} \frac{m^2-1}{m^2} \alpha \frac{p}{h^3} (x^2 - r^2)^2 \quad . \quad . \quad . \quad 272)$$

und hieraus die Durchbiegung in der Mitte ($x = 0$)

$$z' = \frac{3}{16} \frac{m^2-1}{m^2} \alpha p \frac{r^4}{h^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 273)$$

und mit $m = \frac{10}{3}$

$$z' = 0{,}17\,\alpha\,p\,\frac{r^4}{h^3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 274)$$

Aus den Gl. 255a) folgt, da

$$\frac{1}{x}\frac{dz}{dx} = \frac{3}{4}\,\frac{m^2-1}{m^2}\,\alpha\,\frac{p}{h^3}\,(x^2 - r^2),$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{3}{4}\,\frac{m^2-1}{m^2}\,\alpha\,\frac{p}{h^3}\,(3\,x^2 - r^2),$$

$$\frac{\varepsilon_x}{\alpha} = \frac{m-1}{m}\,p_1 + \frac{3}{4}\,\frac{m^2-1}{m^2}\,\frac{p}{h^3}\,\lambda\,(r^2 - 3\,x^2),$$

$$\frac{\varepsilon_y}{\alpha} = \frac{m-1}{m}\,p_1 + \frac{3}{4}\,\frac{m^2-1}{m^2}\,\frac{p}{h^3}\,\lambda\,(r^2 - x^2).$$

Ist, wie vorausgesetzt, $p_1 \geqq 0$, so erlangt $\frac{\varepsilon_x}{\alpha}$ zwei grösste

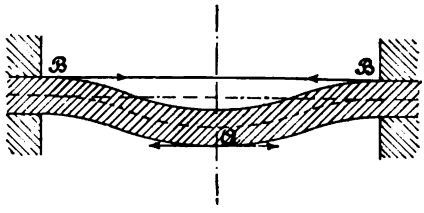


Fig. 197.

Werthe: den einen für $x = 0$ und $\lambda = +\frac{h}{2}$ (Mitte der Scheibe, unterste Faser, bei A, Fig. 197) und den anderen für $x = r$ und $\lambda = -\frac{h}{2}$ (Einspannstelle, oberste Faser, bei B, Fig. 197). Der Erstere beträgt

$$\max\left(\frac{\varepsilon_x}{\alpha}\right)_1 = \frac{m-1}{m}\,p_1 + \frac{3}{8}\,\frac{m^2-1}{m^2}\left(\frac{r}{h}\right)^2 p,$$

der Letztere

$$\max\left(\frac{\varepsilon_x}{\alpha}\right)_2 = \frac{m-1}{m} p_1 + \frac{3}{4}\frac{m^2-1}{m^2}\left(\frac{r}{h}\right)^2 p.$$

Dieser ist der grössere; somit, da die Schubspannungen nach Gl. 260 für $\lambda = \pm\frac{h}{2}$ Null werden,

$$k_b \geqq \frac{m-1}{m} p_1 + \frac{3}{4}\frac{m^2-1}{m^2}\left(\frac{r}{h}\right)^2 p. \quad . \quad . \quad 275)$$

Für $p_1 = 0$ wird

$$k_b \geqq \frac{3}{4}\frac{m^2-1}{m^2}\left(\frac{r}{h}\right)^2 p$$

und mit $m = \frac{10}{3}$

$$k_b \geqq 0{,}68\left(\frac{r}{h}\right)^2 p. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 276)$$

b) Die Scheibe liegt am Rande frei auf und ist nur durch die in der Mitte angreifende Kraft P belastet.

Die Gleichung der Meridianlinie ergiebt sich in gleicher Weise, wie unter a ermittelt, bei Beachtung, dass

$$a = \frac{m^2-1}{m^2}\alpha\frac{6}{h^3} p = 0 \text{ (wegen } p = 0), \; c_2 = 0,$$

und

$$\text{für } x = r \quad z = 0$$

aus Gl. 262 zu

$$z = -\frac{b}{4}\left\{r^2(ln\, r - 1) - x^2(ln\, x - 1)\right\} - \frac{c_1}{4}(r^2 - x^2).$$

Nach Einführung von

$$c_1 = -b\left(ln\, r + \frac{1}{2}\frac{m-1}{m+1}\right)$$

und

$$b = \frac{m^2 - 1}{m^2} \alpha \frac{6}{h^3} \frac{P}{\pi}$$

wird

$$z = \frac{3}{4\pi} \frac{m^2 - 1}{m^2} \alpha \frac{P}{h^3} \left\{ 2 x^2 ln \frac{x}{r} + \frac{3m + 1}{m + 1} (r^2 - x^2) \right\} . \quad 277)$$

Somit die Durchbiegung in der Mitte der Platte ($x = 0$)

$$z' = \frac{3}{4\pi} \frac{(m - 1)(3m + 1)}{m^2} \alpha P \frac{r^2}{h^3} \quad . \quad . \quad 278)$$

und mit $m = \frac{10}{3}$

$$z' = 0{,}55 \, \alpha P \frac{r^2}{h^3} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 279)$$

2. Vergleichung der Voraussetzungen, welche bei den unter Ziff. I durchgeführten Rechnungen gemacht worden sind, mit den thatsächlichen Verhältnissen.

In den weitaus meisten Fällen der Verwendung plattenförmiger Körper im Maschinenbau handelt es sich um die Widerstandsfähigkeit gegenüber Flüssigkeitsbelastung. Die Platten müssen alsdann in der Regel, damit sie abdichten, kräftig gegen die Dichtungsfläche gepresst werden. Sie liegen also keinesfalls lose auf ihrem Widerlager auf, können auch häufig nicht als einfach eingespannt aufgefasst werden, sind vielmehr meist eigenartig befestigt. Betrachten wir beispielsweise die Scheibe, welche in Fig. 198 ein

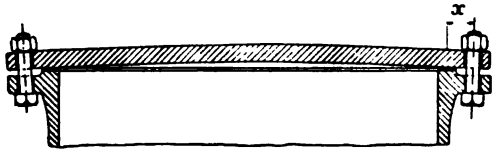


Fig. 198.

cylindrisches Hohlgefäss verschliesst, so erkennen wir sofort, dass noch bevor die Flüssigkeitspressung wirkt, schon durch das Anziehen der Flanschenschrauben die Scheibe sich wölben muss und zwar umsomehr, je grösser der Abstand x der Schrauben von der Dichtungsstelle, d. h. von derjenigen Umfangslinie ist, in welcher der Widerlagsdruck des Dichtungsringes zusammengedrängt ange-

nommen werden darf. Die Scheibe wird also bereits auf Biegung beansprucht, noch ehe eine Flüssigkeitspressung in Thätigkeit getreten ist. Diese Inanspruchnahme kann bei kräftigem Anziehen der Schrauben unter Umständen schon allein die zulässige Anstrengung des Materials überschreiten.

Aber selbst dann ist die Sachlage anders, als die Rechnung voraussetzt, wenn ein solcher Hebelarm x nicht vorhanden wäre, wie

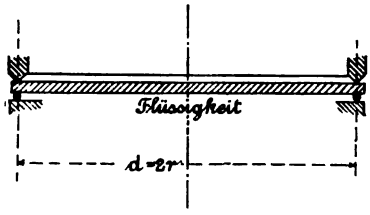


Fig. 199.

z. B. im Falle der Fig. 199, welche die vom Verfasser in seinem Versuchsapparat zur Prüfung ebener Platten angewendete Befestigungsweise zeigt[1]). Die Scheibe liegt hier unten (Seite der gepressten Flüssigkeit) auf einem Dichtungsring von weichem Kupfer (etwa 8 mm stark) und stützt sich oben gegen eine etwa 2,5 mm breite Ringfläche von dem gleichen mittleren Durchmesser wie der Kupferring. Durch Schrauben wird das Obertheil des Apparates gegen das Untertheil so stark gepresst, dass die Abdichtung gesichert ist. Unter Einwirkung der Flüssigkeitspressung biegt sich die Scheibe durch; dabei sucht sie auf dem Dichtungsringe einerseits, sowie auf dem Widerlager anderseits zu gleiten und gleitet thatsächlich (vergl. § 46). Hiermit aber werden Kräfte in den Berührungsflächen zwischen Dichtungsring und Scheibe, sowie zwischen dieser und dem Widerlager wachgerufen, die in der Regel entgegengesetzt gerichtet sind und meist auch von sehr verschiedener Grösse sein werden. Diese Kräfte liefern für die Mittelfläche der Scheibe im Allgemeinen radial wirkende Kräfte, sowie Formänderung und Biegungsanstrengung beeinflussende Momente. Diese Momente, unter Umständen, welche die Regel zu bilden pflegen, von ganz erheblicher Bedeutung, sind von den Entwicklungen unter Ziff. 1, a, α, um die es sich hier handelt, vollständig ausser Acht

[1]) Vergl. hierüber die in § 64 genannte Schrift, oder auch Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure 1890, S. 1041 u. f.

gelassen. Je grösser die Kraft ist, mit welcher die Scheibe zum Zwecke der Abdichtung angepresst wird, um so bedeutender werden — unter sonst gleichen Verhältnissen — die erwähnten Momente sein. Hierbei nimmt die Oberflächenbeschaffenheit der Scheibe, des Widerlagers und des Dichtungsringes Einfluss (vergl. § 46, insbesondere das über den Werth μ Gesagte).

3. Versuchsergebnisse.

Von den Ergebnissen der Versuche, welche Verfasser über die Widerstandsfähigkeit ebener Platten angestellt und hinsichtlich welcher im Allgemeinen auf § 64 verwiesen werden darf, seien hier diejenigen angeführt, welche sich auf kreisförmige Scheiben aus Flussstahlblech erstrecken. Dieses Material besitzt konstanten Dehnungskoefficienten, und erscheinen deshalb die an solchen Scheiben innerhalb der Proportionalitätsgrenze gemessenen Durchbiegungen zu einer Prüfung der unter Ziff. 1 erhaltenen Rechnungsergebnisse geeignet. Der Durchmesser (Fig. 199, 200) betrug hierbei 560 mm.

a) Die Scheibe ist nach Massgabe der Fig. 200 in der Mitte belastet und am Umfange gestützt. Sie legt sich — abgesehen vom Einflusse des Eigengewichts — nur mit derjenigen Pressung gegen das Widerlager, welche durch die den Versuchskörper in der Mitte belastende Kraft hervorgerufen wird.

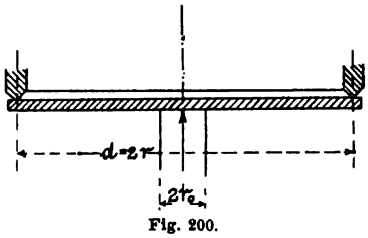


Fig. 200.

Der Dehnungskoefficient α für federnde Durchbiegung ergab sich nach Gl. 279 ($h = 8{,}4$ mm)
bei einer Gesammt-

durchbiegung von	0,205 cm	0,355 cm	0,530 cm	1,1 cm
zu $\alpha =$	$\frac{1}{2900000}$,	$\frac{1}{3025000}$,	$\frac{1}{3972000}$,	$\frac{1}{5116000}$,

während Biegungsversuche mit Flachstäben aus genau dem gleichen Material

$$\alpha = \frac{1}{2147000}$$

lieferten.

Wir erkennen, dass mit wachsender Durchbiegung der Scheibe, d. h. mit zunehmender Abweichung derselben von der Ebene, also mit wachsender Wölbung der Dehnungskoefficient anfangs langsam, dann jedoch rasch abnimmt; später wird diese Abnahme wieder langsamer.

Ferner erhellt, dass der aus Gl. 279 berechnete Dehnungskoefficient selbst bei Durchbiegungen, die im Verhältniss zum Scheibendurchmesser $D = 560$ mm sehr gering erscheinen, ganz erheblich kleiner ist, als der wirkliche Dehnungskoefficient des Materials. Der Unterschied beträgt bei Zugrundelegung des grössten Werthes von α

$$100\,\frac{2900000 - 2147000}{2147000} = 35\,\%.$$

Wir müssen hieraus schliessen, dass die Voraussetzungen, auf Grund deren die Gl. 279 erlangt wurde, — selbst bei lose aufliegender Scheibe — nicht in dem Masse zutreffen, als bei Durchführung der Rechnungen angenommen ist.

b) Die Scheibe ist durch den Flüssigkeitsdruck p gleichmässig belastet und am Umfange nach Massgabe der Fig. 199 gestützt und abgedichtet.

Der Dehnungskoefficient α ergiebt sich nach Gl. 269 ganz allgemein weit kleiner, als ihn das Material thatsächlich besitzt, ausserdem im Einzelnen zunehmend mit wachsender Flüssigkeitspressung. Beispielsweise fand sich für die eine Scheibe ($h = 8{,}5$ mm)

für die Belastungsstufe	$p =$	0,5 bis 1 kg	3 bis 3,5 kg
bei einer Gesammtdurchbiegung	$z' =$	0,106 cm	0,450 cm
	$\alpha =$	$\frac{1}{6257000}$,	$\frac{1}{4434000}$.

Durch Nachdrehen der Muttern, d. h. durch stärkeres Zusammenpressen von Ober- und Untertheil des Versuchsapparates, sinkt der Dehnungskoefficient

für die Belastungsstufe	$p = 4$ bis 4,5 kg
bei einer Gesammtdurchbiegung	$z' = 0{,}585$ cm
auf	$\alpha = \frac{1}{8147000}$.

An dieser Abnahme ist allerdings — jedoch zum weit geringeren Theile — der Einfluss der zunehmenden Wölbung betheiligt. Die Hauptursache aber bildet die Abdichtungskraft, d. h. die Kraft, mit welcher die Scheibe durch die Schrauben zum Zweck der Abdichtung einerseits gegen die Dichtung und andererseits gegen das Widerlager gepresst wird. (Vergl. das oben unter Ziff. 2 Bemerkte.)

Eine stärkere Scheibe ($h = 10{,}1$ mm) liefert

für die Belastungsstufe	$p =$	0,5 bis 1 kg	0,3 bis 3,5 kg
bei einer Gesammtdurchbiegung	$z' =$	0,090 cm	0,365 cm
	$\alpha =$	$\frac{1}{4444000}$,	$\frac{1}{3664000}$,

also verhältnissmässig grössere Werthe des Dehnungskoefficienten.

Eine andere Scheibe ($h = 8{,}4$ mm) ergiebt für die Belastungsstufe $p = 0{,}1$ bis 0,7 kg bei einer Gesammtdurchbiegung bis zu 0,143 cm, wenn die Schrauben kräftig angezogen sind:

$$\alpha = \frac{1}{6540000},$$

wenn dieselben allmählich mehr und mehr gelöst werden:

$$\alpha = \frac{1}{5970000}, \quad \frac{1}{4920000} \quad \text{und} \quad \frac{1}{3820000}.$$

Lösen der Schrauben, d. i. Verminderung der Abdichtungskraft, vermehrt demnach α, ergiebt also Zunahme der Durchbiegung, während Nachziehen der Schrauben, d. i. Vergrösserung der Abdichtungskraft, Verminderung der Durchbiegung zur Folge hat.

Ohne in die Einzelheiten der Wirksamkeit der Abdichtungskraft einzutreten, kann der Einfluss derselben leicht dahin festgestellt werden, dass sich die Scheibe umsomehr von dem Zustande des Loseaufliegens entfernt und umsomehr einem anderen sich

nähert, welcher demjenigen des Eingespanntseins ähnelt[1]), je grösser — unter sonst gleichen Verhältnissen — die Abdichtungskraft ist. Da nun Lösen der Schrauben diese Kraft vermehrt, Anziehen derselben sie vermindert, so kommt Ersteres auf Annäherung an den Zustand des Loseaufliegens, Letzteres auf Annäherung an denjenigen des Eingespanntseins hinaus.

Hiernach wird bei derselben Grösse der Abdichtungskraft eine stärkere Platte unter sonst gleichen Verhältnissen dem Eingespanntsein sich weniger nahe befinden als eine schwächere, d. h. die stärkere Scheibe muss unter sonst gleichen Umständen einen grösseren Dehnungskoefficienten ergeben als die schwächere. Das ergab sich auch thatsächlich für die 10,1 mm starke Scheibe, verglichen mit der zuerst angeführten 8,5 mm dicken Scheibe.

4. Näherungsweg zur Ermittlung der Anstrengung.

a) Die Scheibe, im Umfange vom Halbmesser r aufliegend, wird durch den Flüssigkeitsdruck p über die Fläche πr^2 belastet, Fig. 199.

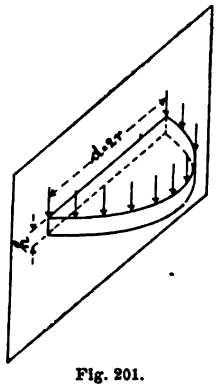


Fig. 201.

Entsprechend dem Umstande, dass bei Gleichartigkeit des Materials die Querschnitte der grössten Anstrengung durch die Mitte der Scheibe gehen müssen, werde die Letztere als ein nach einem

[1]) Von einer vollständigen Einspannung kann natürlich bei der Sachlage Fig. 199 nicht die Rede sein.

Durchmesser eingespannter Stab von rechteckigem Querschnitt r, dessen Breite $d = 2r$ und dessen Höhe h ist, aufgefasst, Fig. 201. Belastet erscheint diese Scheibenhälfte bei Vernachlässigung des Eigengewichts:

α) durch die auf die Unterfläche $0{,}5\,\pi r^2$ wirkende Flüssigkeitspressung p, welche mit Rücksicht darauf, dass der Schwerpunkt der Halbkreisfläche um $\frac{4r}{3\pi}$ von der Mitte absteht, für die Einspannstelle das Moment

$$0{,}5\,\pi r^2 p \,.\, \frac{4r}{3\pi}$$

liefert, und

β) durch den auf die Umfangslinie πr sich vertheilenden Widerlagsdruck $0{,}5\,\pi r^2 p$, welcher als im Schwerpunkte der Halbkreislinie πr angreifend gedacht werden kann, dessen Abstand $\frac{2r}{\pi}$ von der Mitte beträgt und deshalb das Moment

$$0{,}5\,\pi r^2 p \,.\, \frac{2r}{\pi}$$

ergiebt.

Hieraus folgt das biegende Moment

$$0{,}5\,\pi r^2 p\,\frac{2r}{\pi} - 0{,}5\,\pi r^2\, p\,\frac{4r}{3\pi} = \frac{1}{3}\,r^3 p$$

und somit nach Gl. 68, S. 100, da hier

$$\frac{\Theta}{e} = \frac{1}{12}\,2r \,.\, h^3 : \frac{h}{2} = \frac{1}{6}\,2r\,h^2,$$

$$\frac{1}{3}\,r^3 p \leqq k_b \frac{1}{6}\,2r\,h^2$$

unter der Voraussetzung, dass sich das Moment gleichmässig über den Querschnitt von der Breite $d = 2r$ überträgt, und unter Vernachlässigung des Umstandes, dass senkrecht zu einander stehende Normalspannungen vorhanden sind. Thatsächlich treffen diese Voraussetzungen nicht zu; insbesondere werden die nach der Scheiben-

mitte hin gelegenen Elemente des gefährdeten Querschnittes stärker beansprucht sein. Dem kann dadurch Rechnung getragen werden, dass nicht die volle Querschnittsbreite, sondern nur ein Theil, etwa $\frac{2r}{\mu}$, in die Biegungsgleichung eingeführt wird, womit

$$\frac{1}{3} r^3 p \leqq k_b \frac{1}{6} \frac{2r}{\mu} h^2,$$

sodass

$$k_b \geqq \mu \left(\frac{r}{h}\right)^2 p = \frac{1}{4} \mu \left(\frac{d}{h}\right)^2 p$$

oder

$$h \geqq r \sqrt{\mu \frac{p}{k_b}} = 0{,}5\, d \sqrt{\mu \frac{p}{k_b}} \quad \ldots \quad 280)$$

Hierin wird der Grösse μ ganz allgemein der Charakter eines durch Versuche festzustellenden Berichtigungskoefficienten beizulegen sein. Derselbe trägt alsdann nicht blos der ungleichmässigen Vertheilung des biegenden Momentes über den Querschnitt Rechnung (insofern müsste er grösser als 1 sein), sondern auch sonstigen Verhältnissen, namentlich dem Umstande, dass senkrecht zu einander wirkende Normalspannungen thätig sind (insofern würde er kleiner als 1 zu sein haben). Er wird sich ferner in erheblichem Masse abhängig erweisen müssen namentlich von der Befestigungsweise der Scheibe, sowie von der Grösse der Kraft, mit welcher deren Anpressung erfolgt, von der Art der Abdichtung, von der Beschaffenheit der Oberfläche der Scheibe da, wo diese das Dichtungsmaterial berührt, und da, wo sie sich mit ihrer anderen Seite gegen die Auflagefläche stützt u. s. w. Je grösser die Abdichtungskraft ist, um so kleiner — bis zu einer gewissen Grenze hin — wird μ ausfallen müssen.

Je nachdem sich die Auflagerung am Umfange mehr dem Zustande des Eingespanntseins oder demjenigen des Freiaufliegens nähert, schwankt μ nach dem, was aus den bis heute vorliegenden Versuchsergebnissen des Verfassers geschlossen werden darf, zwischen 0,8 und 1,2.

Für die Durchbiegung der Scheibe in der Mitte liefern die Gl. 268 (269) und 273 (274)

$$z' = \psi\,\alpha\,\frac{r^4}{h^3}\,p\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 281)$$

worin der Koefficient ψ nach des Verfassers Versuchen zwischen $\frac{1}{6} = 0{,}167$ und $\frac{3}{5} = 0{,}6$ schwankt, je nach der Befestigungsweise der Scheibe am Rande (vergl. das soeben in dieser Beziehung über μ Bemerkte).

Handelt es sich um die Ermittlung der Anstrengung von Scheiben, welche in der aus Fig. 198 ersichtlichen Weise befestigt sind, sowie um diejenige von Platten, welche Querschnitte besitzen, wie sólche in den Fig. 185 bis 189 dargestellt sind, so ist in ganz entsprechender Weise vorzugehen[1]). Dabei kann alsdann auch auf die Biegungsanstrengung Rücksicht genommen werden, welche bei Vorhandensein des Hebelarmes x, Fig. 198, durch das Anziehen der Flanschenschrauben über diejenige hinaus eintritt, welche von der Flüssigkeitspressung herrührt (vergl. S. 395 und 396).

b) Die Scheibe, im Umfange vom Halbmesser r lose aufliegend, in der Mitte durch eine Kraft P belastet, welche sich gleichförmig über die Kreisfläche πr_0^2 vertheilt, Fig. 200.

Nach dem unter a gegebenen Vorgange findet sich für die nach einem Durchmesser eingespannte Scheibe das Moment, herrührend von dem über die halbe Umfangslinie πr sich gleichmässig vertheilenden Widerlagsdruck $0{,}5\,P$

$$0{,}5\,P\,.\,\frac{2\,r}{\pi}.$$

Demselben wirkt entgegen das Moment, welches die über den Halbkreis $0{,}5\,\pi r_0^2$ gleichmässig vertheilte Kraft $0{,}5\,P$ liefert, d. i.

$$0{,}5\,P\,\frac{4\,r_0}{3\,\pi}.$$

[1]) Derartige Beispiele finden sich behandelt in des Verfassers Maschinenelementen 1891/92, S. 512 u. f. (vergl. auch S. 521 u. f. daselbst).

Somit das resultirende biegende Moment

$$M_b = 0{,}5\, P \frac{2r}{\pi} - 0{,}5\, P \frac{4 r_0}{3\pi} = P \frac{r}{\pi} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r_0}{r}\right),$$

folglich

$$P \frac{r}{\pi} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r_0}{r}\right) \leq k_b \frac{1}{6} \frac{2r}{\mu} h^2,$$

woraus

$$k_b \geq \mu \frac{3}{\pi} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r_0}{r}\right) \frac{P}{h^2}$$

oder

$$h \geq \sqrt{\mu \frac{3}{\pi} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r_0}{r}\right) \frac{P}{k_b}} \quad \ldots \ldots 282)$$

Für $r_0 = r$ und $P = \pi r_0^2 p$ geht diese Beziehung über in

$$h \geq r \sqrt{\mu \frac{p}{k_b}},$$

d. i. Gl. 280, wie verlangt werden muss.

Für sehr kleine Werthe von r_0, d. h. streng für $r_0 = 0$, ist

$$h \geq \sqrt{\mu \frac{3}{\pi} \frac{P}{k_b}},$$

also unabhängig von r oder d.

Die Durchbiegung bestimmt sich nach Gl. 278 (279) aus

$$z' = \psi \alpha \frac{r^2}{h^3} P \ldots \ldots 283)$$

Hierin ist für kleine Werthe von r_0 etwa bis $0{,}1\, r$ hin nach des Verfassers Versuchen

$$\mu = 1{,}5 \quad \text{und} \quad \psi = 0{,}4 \text{ bis } 0{,}5.$$

Für grössere Werthe von r_0 nehmen beide Koefficienten ab, und zwar vermindert sich ψ erheblich stärker als μ.

§ 61. Ebene elliptische Platte, Fig. 202, a > b.

Bevor in gleicher Weise vorgegangen werden kann, wie in § 60, Ziff. 4, ist hier der zu erwartende Verlauf der Bruchlinie

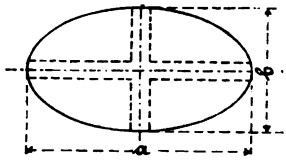


Fig. 202.

festzustellen, d. h. zu untersuchen, ob der Querschnitt der grössten Anstrengung in die Richtung der grossen oder der kleinen Achse fällt.

Zu dem Zwecke denken wir uns in Richtung der grossen Achse a und sodann auch in Richtung der kleinen Achse b je einen (im Vergleich zu a und b) sehr schmalen Streifen von der Breite 1, der Länge a, bezw. b, herausgeschnitten und zu einem rechtwinkligen Streifenkreuz vereinigt, wie in Fig. 202 gestrichelt angegeben ist. In der Mitte des Kreuzes wirke eine Last P. Dieselbe wird sich alsdann auf die vier Widerlager an den Enden der Streifen derart vertheilen, dass diese in der Mitte sich um gleichviel durchbiegen. Bezeichnet

W_a die Widerlagskraft je an den beiden Enden des Streifens von der Länge a,

W_b die Widerlagskraft je an den beiden Enden des Streifens von der Länge b,

so entfällt von der Belastung P auf die Mitte des Streifens von der Länge a die Kraft $2\,W_a$ und auf diejenige des Streifens von der Länge b die Kraft $2\,W_b$.

Die Durchbiegung der Mitte eines an den Enden im Abstande l frei aufliegenden und in der Mitte durch eine Kraft S belasteten Stabes, dessen in Betracht kommendes Trägheitsmoment Θ ist, beträgt nach Gl. 62

$$y' = S\,\frac{\alpha}{\Theta}\,\frac{l^3}{48}\,,$$

demnach die Durchbiegung y_a' des Streifens von der Länge a

$$y_a' = 2\, W_a \frac{\alpha}{\Theta} \frac{a^3}{48}$$

und diejenige des Streifens von der Länge b

$$y_b' = 2\, W_b \frac{\alpha}{\Theta} \frac{b^3}{48}.$$

Wegen

$$y_a' = y_b'$$

wird

$$W_a a^3 = W_b b^3,$$

d. h.

$$\frac{W_b}{W_a} = \frac{a^3}{b^3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 284)$$

Die grösste Materialanstrengung σ_a in der Mitte des a langen Streifens ergiebt sich bei Vernachlässigung des Zusammenhanges mit dem anderen Streifen unter Beachtung der Gl. 56a aus

$$W_a \frac{a}{2} = \frac{1}{6} \sigma_a h^2$$

zu

$$\sigma_a = 3\, W_a \frac{a}{h^2}$$

und in gleicher Weise diejenige des b langen Streifens zu

$$\sigma_b = 3\, W_b \frac{b}{h^2}.$$

Folglich mit Rücksicht auf Gl. 284

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_a} = \frac{W_b b}{W_a a} = \frac{a^2}{b^2}$$

oder

$$\sigma_b = \sigma_a \left(\frac{a}{b}\right)^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 285)$$

Da $a > b$, so ist

$$\sigma_b > \sigma_a,$$

beispielsweise

$$\text{für } a = 2b \qquad \sigma_b = \sigma_a \left(\frac{2b}{b}\right)^2 = 4\sigma_a^2$$

$$\text{„ } a = 3b \qquad \sigma_b = \sigma_a \left(\frac{3b}{b}\right)^2 = 9\sigma_a^2.$$

Wir erkennen, dass die am meisten gespannten Fasern in Richtung der kleinen Achse eine im quadratischen Verhältnisse der Achslängen stärkere Normalspannung erfahren als diejenigen in Richtung der grossen Achse und schliessen hieraus, dass die Bruchlinie in der Richtung der grossen Achse verlaufen muss.

Dementsprechend ist die elliptische Platte so einzuspannen, dass die grosse Achse a die Breite des Befestigungsquerschnittes bildet.

a) Die elliptische Platte, welche im Umfange, bestimmt durch die grosse Achse a und die kleine Achse b, aufliegt, wird durch den Flüssigkeitsdruck p über die Fläche $\frac{\pi}{4} ab$ belastet.

Auf dem in § 60, Ziff. 4 beschrittenen Wege (vergl. Fig. 201) wird das biegende Moment M_b erhalten als Unterschied zwischen dem Moment M_u, welches die von der stützenden Halbellipse (Widerlager) auf die Platte ausgeübten Kräfte, die Umfangskräfte, liefern, und demjenigen Moment, welches der Flüssigkeitsdruck ergiebt, d. i.

$$\frac{1}{8} \pi a b p \frac{2}{3\pi} b = \frac{1}{12} a b^2 p.$$

Die Bestimmung von M_u ist hier jedoch weniger einfach als dort. Bei der kreisförmigen Scheibe durfte ohne Weiteres gleichmässige Vertheilung des Widerlagsdruckes über den Kreisumfang angenommen, d. h. vorausgesetzt werden, dass jede Längeneinheit

des Umfanges πd von dem Widerlager die gleiche Pressung erfährt. Bei der elliptischen Platte ist diese Annahme nicht zulässig; denn nach Gl. 284 nimmt der Widerlagsdruck von den Endpunkten der grossen Achse, woselbst er durch W_a gemessen wird, nach den Endpunkten der kleinen Achse hin zu und zwar im umgekehrten kubischen Verhältniss der Achslängen[1]). Da wo der Krümmungshalbmesser der Ellipse am kleinsten ist, besitzt auch der Widerlagsdruck seinen geringsten Werth; da wo jener seinen Grösstwerth erreicht, weist auch dieser denselben auf.

Der Krümmungshalbmesser der Ellipse ist bekanntlich im Scheitel der grossen Achse

$$\varrho_a = \frac{b^2}{2a},$$

im Scheitel der kleinen Achse

$$\varrho_b = \frac{a^2}{2b},$$

demnach

$$\varrho_b : \varrho_a = a^3 : b^3,$$

d. i. aber dasselbe Verhältniss, in welchem nach Gl. 284 die Grössen W_b und W_a zu einander stehen. Es darf daher ausgesprochen werden, dass sich W_b und W_a wie die zugehörigen Krümmungshalbmesser verhalten. Je mehr a von b abweicht, um so ungleichförmiger vertheilt sich der Flüssigkeitsdruck über das Widerlager.

Zur Feststellung des Momentes M_u, welches dieser veränderliche Widerlagsdruck in Bezug auf den Befestigungsquerschnitt der elliptischen Platte liefert, werde die Ellipse auf ein rechtwinkliges

[1]) Diese Veränderlichkeit, welche beispielsweise bei dem Achsenverhältniss $a : b = 3 : 2$ nach Gl. 284 durch die Zahlen

$$3^3 : 2^3 = 27 : 8$$

gemessen wird derart, dass die Pressung, mit welcher die elliptische Platte im Scheitel der kleinen Achse gegen das Widerlager drückt, 27 : 8 mal = 3,375 mal grösser ist als diejenige im Scheitel der grossen Achse, bedingt eine ungleichmässige Belastung gleich weit von einander abstehender Schrauben, durch welche etwa die Platte als Verschlussdeckel befestigt ist.

Koordinatensystem bezogen, dessen Ursprung im Mittelpunkt der Ellipse liegt, dessen x-Achse in die grosse Achse und dessen y-Achse in die kleine Achse fällt. Für einen beliebigen, durch x und y bestimmten Punkt der Ellipse sei das zugehörige Kurvenelement mit ds bezeichnet. Der auf dasselbe wirkende Widerlagsdruck betrage $W ds$. Dann ist

$$M_u = \int y\, W ds,$$

wobei die Integration sich auf die halbe Ellipse zu erstrecken hat.

Aus der Gleichung der Ellipse

$$\left(\frac{x}{\frac{a}{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{b}{2}}\right)^2 = 1$$

folgt, sofern noch

$$x = \frac{a}{2} \sin \varphi$$

gesetzt wird,

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - x^2} = \frac{b}{2} \cos \varphi,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - x^2}} = -\frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi,$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}\; d\left(\frac{a}{2} \sin \varphi\right)$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \varphi}\, d\varphi.$$

Nach Einführung von

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = n^2 = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

ergiebt sich

$$ds = \frac{a}{2}\sqrt{1 - n^2 \sin^2\varphi}\,.\,d\varphi,$$

und

$$y\,ds = \frac{a\,b}{4}\sqrt{1 - n^2 \sin^2\varphi}\,.\,\cos\varphi\,d\varphi.$$

Hinsichtlich der Veränderlichkeit des Widerlagsdruckes W fanden wir oben für die zwei Grenzwerthe W_a (in den Scheiteln der grossen Achse) und W_b (in den Scheiteln der kleinen Achse), dass sie sich verhalten wie die zugehörigen Krümmungshalbmesser. Mit Rücksicht hierauf werde angenommen, dass W in dem beliebigen Punkte $x\,y$ proportional dem Krümmungshalbmesser ϱ an dieser Stelle sei, d. h.

$$W = W_b \frac{\varrho}{\varrho_b} = W_b \frac{\varrho}{\frac{a^2}{2b}}.$$

Da

$$\varrho = \pm \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}^3}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

so findet sich mit

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2b}{a^2}\frac{1}{\cos^3\varphi}$$

die absolute Grösse des Krümmungshalbmessers zu

$$\varrho = \frac{a^2}{2b}\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \operatorname{tg}^2\varphi}^3\,.\cos^3\varphi = \frac{a^2}{2b}\sqrt{\cos^2\varphi + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \sin^2\varphi}^3$$

$$= \frac{a^2}{2b}\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2\varphi}^3 = \frac{a^2}{2b}\sqrt{1 - n^2\sin^2\varphi}^3.$$

Für

$$x = 0, \quad \text{d. i. } \varphi = 0, \quad \text{wird} \quad \varrho = \varrho_b = \frac{a^2}{2b},$$

$$x = \frac{a}{2}, \text{ d. i. } \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \text{„} \quad \varrho = \varrho_a = \frac{b^2}{2a},$$

wie oben bereits bemerkt.

Hiermit

$$W = W_b \frac{\varrho}{\frac{a^2}{2b}} = W_b \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varphi}^3,$$

und infolge dessen für die halbe Ellipse

$$M_x = \int y W \, ds = 2 \frac{ab}{4} W_b \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - n^2 \sin^2 \varphi)^2 \cos \varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{ab}{2} W_b \left(1 - \frac{2}{3} n^2 + \frac{1}{5} n^4\right).$$

Der Werth W_b bestimmt sich aus der Erwägung, dass die Kraft, welche die unter der Pressung p stehende Flüssigkeit auf die Hälfte der elliptischen Platte ausübt, d. i.

$$\frac{\pi ab}{8} p,$$

gleich sein muss der Summe der Widerlagskräfte für die halbe Ellipse, sofern von dem Einflusse des Eigengewichts abgesehen wird und andere, den Widerlagsdruck beeinflussende Kräfte nicht vorhanden sind, d. h.

$$\frac{\pi a b}{8} p = \int W \, ds = 2 \frac{a}{2} W_b \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - n^2 \sin^2 \varphi)^2 \, d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2} a W_b \left(1 - n^2 + \frac{3}{8} n^2\right),$$

zu

$$W_b = \frac{b}{4} p \frac{1}{1 - n^2 + \frac{3}{8} n^2}.$$

Die Einführung dieses Werthes in die Gleichung für M_u liefert

$$M_u = \frac{a b^2}{8} p \frac{1 - \frac{2}{3} n^2 + \frac{1}{5} n^4}{1 - n^2 + \frac{3}{8} n^4} = \frac{a b^2}{15} p \frac{8 + 4 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3 \left(\frac{b}{a}\right)^4}{3 + 2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3 \left(\frac{b}{a}\right)^4}.$$

Hiermit ergiebt sich nun die Biegungsgleichung in Bezug auf den a breiten und h hohen Querschnitt der elliptischen Platte bei Einführung des Berichtigungskoefficienten μ (vergl. § 60, Ziff. 4)

$$M_b = \frac{a b^2}{15} p \frac{8 + 4 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3 \left(\frac{b}{a}\right)^4}{3 + 2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3 \left(\frac{b}{a}\right)^4} - \frac{\pi a b}{8} p \frac{2 b}{3 \pi} \leq \frac{1}{6} k_b \frac{a}{\mu} h^2,$$

woraus

$$k_b \geq \frac{1}{2} \mu \frac{3{,}4 + 1{,}2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 0{,}6 \left(\frac{b}{a}\right)^4}{3 + 2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3 \left(\frac{b}{a}\right)^4} p \left(\frac{b}{h}\right)^2,$$

oder

$$h > \frac{1}{2} b \sqrt{2 \mu \frac{3{,}4 + 1{,}2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 0{,}6 \left(\frac{b}{a}\right)^4}{3 + 2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3 \left(\frac{b}{a}\right)^4} \frac{p}{k_b}}. \quad 286)$$

Für $a = b = d$ gehen diese Ausdrücke über in

$$k_b \geqq \frac{1}{4}\,\mu \left(\frac{d}{h}\right)^2 p, \text{ bezw. } h \geqq \frac{1}{2}\, d \sqrt{\mu \frac{p}{k_b}},$$

d. s., wie nothwendig, die Gl. 280 für die kreisförmige Scheibe.

Mit Annäherung werde gesetzt

$$\frac{3{,}4 + 1{,}2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 0{,}6 \left(\frac{b}{a}\right)^2}{3 + 2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{a}\right)^4} = \sim \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

infolge dessen

$$\left.\begin{aligned} k_b &\geqq \frac{1}{2}\,\mu \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \left(\frac{b}{h}\right)^2 p \\ \text{oder} \qquad & \\ h &\geqq \frac{1}{2}\, b \sqrt{\frac{2\mu}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \frac{p}{k_b}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 287)$$

Für den bei Mannlochverschlüssen üblichen Werth $a = \sim 1{,}5\, b$ liefern die Gleichungen 286

$$k_b \geqq \frac{1}{2}\,\mu \frac{3{,}4 + 1{,}2\,\frac{4}{9} - 0{,}6\,\frac{16}{81}}{3 + 2\,\frac{4}{9} + 3\,\frac{16}{81}} \left(\frac{b}{h}\right)^2 p = 0{,}425\,\mu \left(\frac{b}{h}\right)^2 p,$$

bezw.

$$h \geqq 0{,}65\, b \sqrt{\mu \frac{p}{k_b}},$$

die Gl. 287

$$k_b \leqq \frac{1}{2}\,\mu \frac{1}{1 + \frac{4}{9}} \left(\frac{b}{h}\right)^2 p = 0{,}346\,\mu \left(\frac{b}{h}\right)^2 p,$$

bezw.

$$h \geqq 0{,}59\, b \sqrt{\mu \cdot \frac{p}{k_b}}.$$

Demnach ergiebt sich im vorliegenden Falle die Wandstärke unter Benutzung der Gl. 287 um

$$100\,\frac{0{,}65 - 0{,}59}{0{,}65} = 9\,\%$$

geringer als Gl. 286 liefert.

Der Berichtigungskoefficient μ liegt nach Versuchen des Verfassers etwa zwischen $\frac{2}{3} = 0{,}67$ und $\frac{9}{8} = 1{,}12$, je nachdem sich die Auflagerung am Umfange mehr dem Zustande des Eingespanntseins oder demjenigen des Freiaufliegens nähert.

b) Die elliptische Platte, wie unter a, jedoch lose aufliegend und nur in der Mitte mit der Kraft P belastet.

Unter a) fand sich für das Moment der am stützenden Umfange der Platte thätigen Widerlagskräfte

$$M_a = \frac{a\,b}{2}\, W_b \left(1 - \frac{2}{3}\, n^2 + \frac{1}{5}\, n^4\right),$$

worin bedeutet

$$n^2 = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

und worin W_b, die auf die Längeneinheit der elliptischen Stützlinie bezogene Widerlagskraft im Scheitel der kleinen Achse, hier bestimmt ist durch die Gleichung

$$\frac{P}{2} = \int W\, ds = 2\,\frac{a}{2}\, W_b \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - n^2 \sin^2\varphi)^2\, d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2}\, a\, W_b \left(1 - n^2 + \frac{3}{8}\, n^4\right),$$

somit beträgt

$$W_b = \frac{P}{\pi a \left(1 - n^2 + \frac{3}{8} n^4\right)}.$$

Die Einsetzung dieses Werthes in die Gleichung für M_u, die unter der Voraussetzung, dass die belastende Kraft sich nur auf eine sehr kleine Fläche in der Mitte der Platte vertheilt[1]), auch gleichzeitig mit Annäherung das biegende Moment liefert, führt alsdann zu

$$\frac{b}{2\pi} P \frac{1 - \frac{2}{3} n^2 + \frac{1}{5} n^4}{1 - n^2 + \frac{3}{8} n^4} \leqq k_b \frac{1}{6} \frac{a}{\mu} h^2,$$

woraus

$$k_b \geqq \frac{8}{5\pi} \mu \frac{8 + 4\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{a}\right)^4}{3 + 2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{a}\right)^4} \frac{b}{a} \frac{P}{h^2}$$

oder

$$h \geqq \sqrt{\frac{8}{5\pi} \mu \frac{8 + 4\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{a}\right)^4}{3 + 2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{a}\right)^4} \frac{b}{a} \frac{P}{k_b}} \quad \text{288)}$$

Hierin ist nach den Ergebnissen der Versuche des Verfassers

$$\mu = \frac{3}{2} = 1{,}5 \text{ bis } \frac{5}{3} = 1{,}67$$

zu setzen.

Mit $b = a$ ergiebt sich aus Gl. 288

$$k_b \geqq \frac{3}{\pi} \mu \frac{P}{h^2},$$

übereinstimmend mit Gl. 282, wenn $r_0 = 0$ gesetzt wird.

[1]) Erscheint diese Voraussetzung nicht genügend erfüllt, so ist die Grösse der Fläche, über welche sich P vertheilt, in's Auge zu fassen und so vorzugehen, wie oben in § 60, Ziff. 4, b geschehen.

§ 62. Ebene quadratische Platte, Seitenlänge a.

Wie in § 61, so muss auch hier zunächst die zu erwartende Linie der grössten Anstrengung (Bruchlinie) festgestellt werden. Diesem Zwecke dient die folgende Betrachtung.

Um den Mittelpunkt M der noch unbelasteten Platte werde auf derjenigen Plattenfläche, deren Fasern gezogen werden, ein kleines Quadrat, Fig. 203, gezeichnet, dessen Seiten BAB parallel den

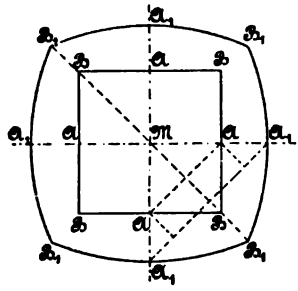


Fig. 203.

Seiten der Platte laufen. Unter Einwirkung der Belastung nehmen die Strecken MA die Länge MA_1 (übertrieben und ohne genaueres Eingehen auf den Verlauf der Formänderung gezeichnet) an, vergrössern sich also um AA_1. Die Strecken AB dehnen sich als ausserhalb der Mitte gelegen, woselbst die Dehnung am grössten ist, etwas weniger, etwa so, dass die Punkte B nach B_1 rücken. Dabei geht dann das ursprüngliche Quadrat in die Figur $A_1B_1A_1B_1A_1B_1A_1B_1$ mit gekrümmten Seiten $B_1A_1B_1$ über.

Es beträgt nun die verhältnissmässige Dehnung in Richtung von MA

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{MA}}.$$

Ihr gleich erweist sich in dem kleinen (rechts unten gelegenen) Vierseit $MAA_1B_1A_1A$, in welches das Quadrat $MABA$ übergegangen ist, nur die Dehnung in der Richtung A_1A_1. Dieselbe wird gemessen durch

$$\frac{\overline{A_1A_1} - \overline{AA}}{\overline{AA}} = \frac{2\,(\overline{AA_1}\sqrt{0{,}5})}{\overline{MA}\sqrt{2}} = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{MA}}.$$

Die Dehnungen nach allen übrigen Richtungen sind kleiner, wie eine einfache Betrachtung sämmtlicher, im ursprünglichen Quadrate $MABA$ beim Uebergange in das Vierseit $MA_1B_1A_1$ eingetretenen Längenänderungen ohne Weiteres erkennen lässt. Demnach tritt die grösste Anstrengung ausserhalb des Punktes M nur in der Richtung AA oder A_1A_1 ein, d. h. der Verlauf der Bruchlinie wird von der Mitte aus nach der Richtung der Diagonale zu erwarten sein.

Noch deutlich tritt das hervor, wenn auf der bezeichneten Seite der Platte ein Quadratnetz gezeichnet wird, wie in Fig. 204

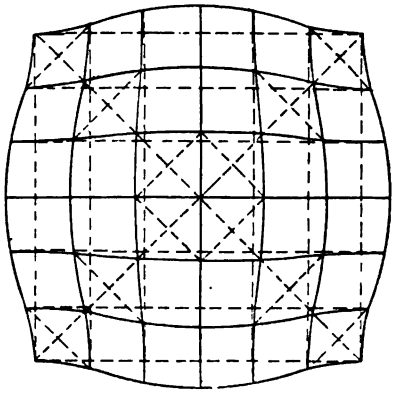


Fig. 204.

gestrichelt angedeutet ist. Durch die Belastung werden diese ursprünglich geraden Netzlinien in Kurven übergehen, ungefähr wie in Fig. 204 übertrieben gezeichnet. Dass die Dehnungen senkrecht zur Diagonale am grössten sind, somit die Bruchlinie nach dieser verlaufen wird, dürfte die Abbildung deutlich zeigen.

a) Die quadratische Platte, am Umfange 4a aufliegend, wird durch den Flüssigkeitsdruck p über die Fläche a^2 belastet.

Mit Rücksicht auf das Erörterte werde die quadratische Platte nach Massgabe der Fig. 205 eingespannt.

Das biegende Moment M_b ergiebt sich alsdann aus der Erwägung,

dass auf jede der vier Quadratseiten eine resultirende Widerlagskraft $\frac{1}{4} a^2 p$ wirkt, deren Angriffspunkt in der Seitenmitte, also im Abstande $\frac{1}{2} a \sqrt{\frac{1}{2}}$ vom Einspannungsquerschnitt anzunehmen ist,

dass es sich für den Letzteren um zwei solche Quadratseiten handelt, demnach um ein Moment der Widerlagskräfte von der Grösse $2 \cdot \frac{1}{4} a^2 p \cdot \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{1}{2}}$,

dass der Flüssigkeitsdruck auf die von der Diagonale begrenzte Quadrathälfte $\frac{1}{2} a^2 p$ beträgt und im Schwerpunkte, d. i. im Abstande $\frac{1}{3} a \sqrt{\frac{1}{2}}$ vom Einspannungsquerschnitt angreift.

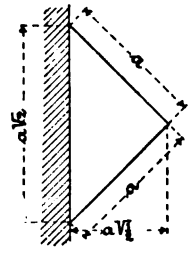


Fig. 205.

Hiermit folgt

$$M_b = 2 \cdot \frac{1}{4} a^2 p \cdot \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} a^2 p \cdot \frac{a}{3} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12} a^3 p \sqrt{\frac{1}{2}}$$

und demnach die Biegungsgleichung für den $a\sqrt{2}$ breiten und h hohen Querschnitt

$$\frac{1}{12} a^3 p \sqrt{\frac{1}{2}} \leq k_b \frac{1}{6} \frac{a\sqrt{2}}{\mu} h^2 = \frac{1}{3\varphi} \sqrt{\frac{1}{2}} k_b a h^2,$$

woraus

$$k_b \geq \frac{1}{4}\mu\left(\frac{a}{h}\right)^2 p \quad \ldots\ldots$$

oder

$$h \geq \frac{1}{2}a\sqrt{\mu\frac{p}{k_b}} \quad \ldots\ldots \qquad 289)$$

Hierin ist nach Versuchen des Verfassers

$$\mu = \frac{3}{4} = 0{,}75 \text{ bis } \frac{9}{8} = 1{,}12$$

zu setzen, je nachdem sich die Auflagerung am Umfange mehr dem Zustande des Eingespanntseins oder demjenigen des Freiaufliegens nähert.

b) Die quadratische Platte, wie unter a), jedoch lose aufliegend und nur in der Mitte durch eine Kraft P belastet.

Auf dem Wege wie unter a) findet sich

$$\frac{P}{2}\,\frac{1}{2}\,a\sqrt{\frac{1}{2}} \leq k_b\,\frac{1}{6}\,\frac{a\sqrt{2}}{\mu}\,h^2,$$

woraus

$$k_b \geq \frac{3}{4}\mu\frac{P}{h^2} \quad \ldots\ldots$$

oder

$$h \geq \frac{1}{2}\sqrt{3\mu\frac{P}{k_b}} \quad \ldots\ldots \qquad 290)$$

Für den Berichtigungskoefficienten ist zu setzen (Versuche des Verfassers):

$$\mu = \frac{7}{4} = 1{,}75 \text{ bis } 2.$$

§ 63. Ebene rechteckige Platten, Fig. 206, $a > b$.

a) Die rechteckige Platte, welche im Umfange $2(a+b)$, bestimmt durch die lange Seite a und die kurze Seite b, aufliegt, ist durch den Flüssigkeitsdruck p über die Fläche ab belastet.

Die in § 61 für die elliptische Platte angestellte Betrachtung, welche zu der Erkenntniss führte, dass die grösste Anstrengung für den Mittelpunkt derselben in Richtung der kleinen Achse stattfindet, kann ohne Weiteres auch auf die rechteckige Platte übertragen werden. Sie ergiebt, dass für den Mittelpunkt der Letzteren die grösste Inanspruchnahme in Richtung der kleinen Seite statthat und dass infolge dessen in der Mitte die Bruchlinie in

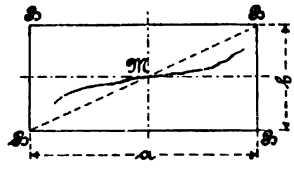


Fig. 206.

Richtung der langen Seite verlaufen wird. Nach aussen hin wird sie jedoch, wie aus dem in § 62 Erörterten zu schliessen ist (vergl. auch Fig. 204), die Neigung haben müssen, in die Diagonale einzubiegen, etwa nach Fig. 206. Die Wahl unter den Diagonalen dürfte hierbei von Ungleichheiten im Material oder in der Stützung der Platte wesentlich beeinflusst werden.

Unter diesen Umständen begegnet die zutreffende Annahme des Bruchquerschnitts erheblicher Unsicherheit. In Erwägung des für die Entwicklungen dieses Paragraphen allgemein gemachten und durch Einführung des Berichtigungskoefficienten μ auch rechnerisch zum Ausdruck gebrachten Vorbehaltes, die erhaltenen Gleichungen durch Versuche hinsichtlich ihrer Zuverlässigkeit zu prüfen, sowie in Anbetracht der Nothwendigkeit, die praktisch wichtige Aufgabe mit einfachen Mitteln der Lösung zuzuführen, entschliessen wir uns für die Einspannung nach der Diagonale

BMB mit der Massgabe, nur das für diesen Querschnitt sich ergebende biegende Moment in Rechnung zu stellen.

Der gesammte Flüssigkeitsdruck abp vertheilt sich allerdings nicht gleichförmig über die Seiten a, bezw. b; vielmehr wird der Auflagerdruck in der Mitte der Seiten am grössten sein und nach den Eckpunkten des Rechtecks hin abnehmen. Jedenfalls aber darf davon ausgegangen werden, dass für jede Seite der resultirende Widerlagsdruck durch die Mitte derselben geht, also um

$$\frac{b}{2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

von dem Einspannungsquerschnitt absteht. So ergiebt sich das biegende Moment

$$M_b = \frac{1}{2}abp\,.\,\frac{b}{2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{2}abp\,.\,\frac{1}{3}\,b\,\frac{a}{\sqrt{a^2+a^2}} = \frac{1}{12}\,\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\,p,$$

und hiermit die Biegungsgleichung für den $\sqrt{a^2+b^2}$ breiten und h hohen Querschnitt

$$\frac{1}{12}\,\frac{a^2\,b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\,p \leqq k_b\,\frac{1}{6}\,\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\mu}\,h^2,$$

oder

$$\left.\begin{aligned} k_b &\geqq \frac{1}{2}\,\mu\,\frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\left(\frac{b}{h}\right)^2 p, \\ h &\geqq \frac{1}{2}\,b\,\sqrt{\frac{2\,\mu}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\,\frac{p}{k_b}}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 291)$$

Mit $b = a$ ergiebt sich

$$k_b \geqq \frac{1}{4}\,\mu\left(\frac{a}{h}\right)^2 p, \qquad \text{oder} \qquad h \geqq \frac{1}{2}\,\mu\,a\,\sqrt{\frac{p}{k_b}},$$

wie in § 62 für die quadratische Platte gefunden worden ist.

b) Die rechteckige Platte, wie unter a), jedoch am Umfange lose aufliegend und nur in der Mitte durch eine Kraft P belastet.

Auf dem unter a) beschrittenen Weg findet sich

$$\frac{P}{2}\,\frac{b}{2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq k_b\,\frac{1}{6}\,\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\mu}\,h^2,$$

woraus

$$k_b \geq \frac{3}{2}\,\mu\,\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}\,\frac{P}{h^2},$$

oder

$$h = \sqrt{\frac{3}{2}\,\mu\,\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}\,\frac{P}{k_b}}. \qquad \ldots\ldots 292)$$

Hieraus folgen die Gl. 290, wenn $b = a$ gesetzt wird.

§ 64. Versuchsergebnisse.

Die in der Einleitung zu diesem Abschnitt erörterte Sachlage verlangte dringend die Anstellung von Versuchen über die Widerstandsfähigkeit plattenförmiger Körper. Infolge dessen unterzog sich Verfasser dieser Aufgabe und führte 1889/90 nach Konstruktion der erforderlichen Versuchseinrichtungen — solche lagen bisher nicht vor — eine grosse Anzahl von Versuchen mit Platten von Flussstahlblech und Gusseisen durch. Ueber dieselben ist in dessen Schrift: „Versuche über die Widerstandsfähigkeit ebener Platten", Berlin 1890, berichtet[1]).

[1]) Ergänzungen hierzu finden sich in des Verfassers Arbeiten: „Versuche über die Widerstandsfähigkeit der Wasserkammerplatten von Wasserröhrenkesseln" (Versuche über die Widerstandsfähigkeit von Kesselwandungen, Heft 1, Berlin 1893, oder auch Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1893, S. 489 u. f., S. 526 u. f.), „Berechnung von Schieberkastendeckeln" u. s. w. (Protokoll der 21. Delegirten- und Ingenieur-Versammlung des internationalen

Insoweit es sich bei denselben um Scheiben von Flussstahlblech handelt, ist das Wichtigste aus den Ergebnissen in § 61, Ziff. 3 hervorgehoben, sodass hier auszugsweise nur noch der Ergebnisse zu gedenken sein wird, welche mit gusseisernen Platten angestellt worden sind. Hinsichtlich der Einzelheiten darf auf die erwähnte Schrift sowie auf die in der Fussbemerkung bezeichneten Arbeiten verwiesen werden.

I. Verlauf der Bruchlinie, sonstiges Verhalten.

In Bezug auf den zu erwartenden Verlauf der Bruchlinie wurden in den vorhergehenden Paragraphen (§ 60, Ziff. 4, § 61, § 62 und § 63) gewisse Betrachtungen angestellt, welche dazu führten, anzunehmen, dass diese Linie verlaufen werde

1. bei der kreisförmigen Scheibe ungefähr nach einem Durchmesser,
2. „ „ elliptischen Platte ungefähr in Richtung der grossen Achse,
3. „ „ quadratischen „ „ „ „ „ Diagonale,
4. „ „ rechteckigen „ „ nach Massgabe der Fig. 206.

Ueber den thatsächlichen Verlauf der Bruchlinien geben die Fig. 207 bis 215 im Text und Fig. 216 auf Taf. XIV Auskunft.

Fig. 207 zeigt die Bruchlinie einer gusseisernen Scheibe von 12 mm Stärke (immer auf der Seite der gezogenen Fasern). Andere Scheiben von derselben Stärke weisen ähnliche Bruchlinien auf. Die Scheibe ruht während des Versuchs auf einem Dichtungsring von weichem Kupfer (etwa 8 mm stark) und stützt sich oben gegen eine 2,5 mm breite Ringfläche von dem gleichen mittleren Durchmesser, wie der Kupferring, nämlich 560 mm. Die Pressung

---

Verbandes der Dampfkessel-Ueberwachungsvereine zu Nürnberg 1892, S. 84 u. f., oder auch Zeitschrift dieses Verbandes 1893, Berlin und Breslau, S. 1 u. f., dieser Vortrag liefert gleichzeitig einen Beitrag zur Beurtheilung des Grades der Verantwortlichkeit, die den einzelnen Ingenieur, dessen Konstruktionen infolge ungenügender Widerstandsfähigkeit ebener Wandungen zu einem Unfalle geführt haben, thatsächlich trifft), „Maschinenelemente“ 1891/92 (S. 512 u. f., S. 521 u. f., 1894, im siebenten Abschnitt, A, I und II), „Die Berechnung flacher, durch Anker- oder Stehbolzen unterstützter Kesselwandungen, und die Ergebnisse der neuesten hierauf bezüglichen Versuche“ (Versuche über die Widerstandsfähigkeit von Kesselwandungen, Heft 2, Berlin 1894 oder auch Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1894, S. 341 u. f., S. 373 u. f.).

zwischen der Scheibe und dem Kupferring muss natürlich so gross sein, dass die Abdichtung gesichert ist.

Zu Ziff. 1.

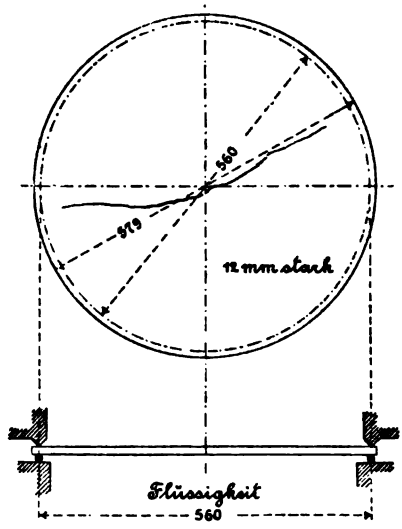


Fig. 207.

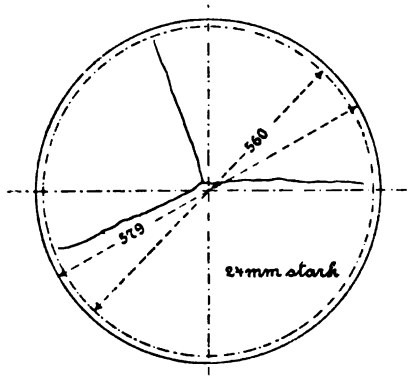


Fig. 208.

Fig. 208 giebt die Bruchlinie einer gusseisernen Scheibe von 24 mm Stärke wieder: sie verläuft ungefähr nach drei Halbmessern. Weitere Scheiben von dieser Stärke brachen in ähnlicher Weise.

Die der Prüfung unterworfenen Stahlscheiben bogen sich durch, ohne zu brechen.

Zu Ziff. 2.

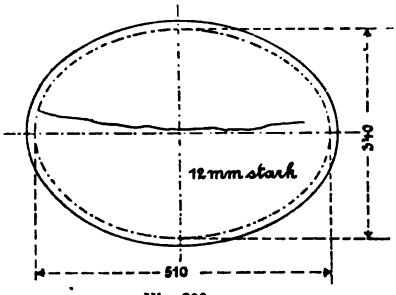


Fig. 209.

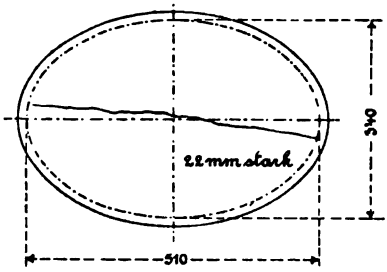


Fig. 210.

Wie die Fig. 209 und 210 (gusseiserne Platten) erkennen lassen, entspricht der Verlauf der Bruchlinien mit befriedigender Annäherung der gemachten Annahme, gleichgiltig, ob die Platte mehr oder weniger stark ist.

Fig. 211 (Gusseisen) zeigt für die quadratische Platte das Zutreffen der gemachten Voraussetzung.

Zu Ziff. 3.

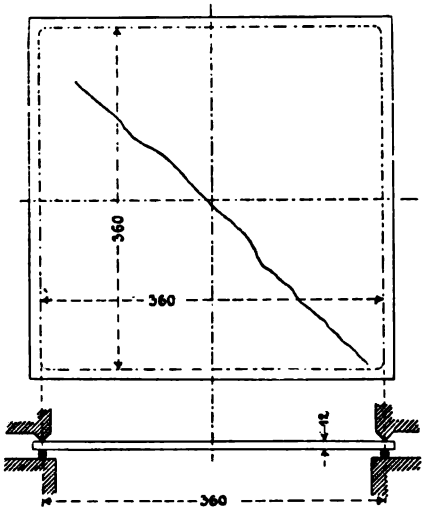


Fig. 211.

Die Fig. 212 bis 215 (Gusseisen $a : b = 2 : 3$ und $1 : 3$) entsprechen dem Ergebniss der stattgehabten Erwägung mehr oder minder.

Zu Ziff. 4.

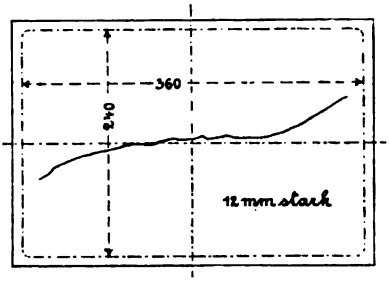


Fig. 212.

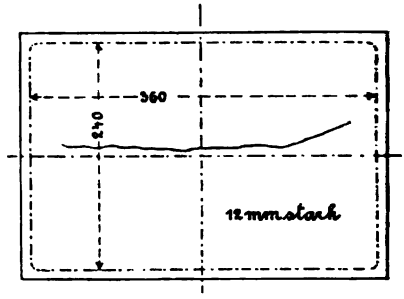


Fig. 213.

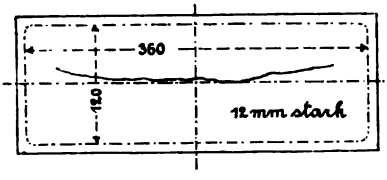


Fig. 214.

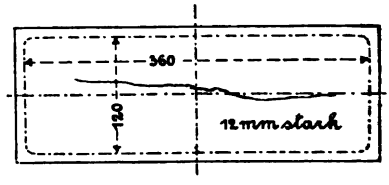


Fig. 215.

Um ein getreues Bild der Formänderungen rechteckiger Platten zu erhalten, wurde eine solche aus Hartblei ($a = 360$ mm, $b = 240$ mm, $h = 20$ mm) hergestellt und ihre Oberfläche durch Gebrauch der Reissnadel mit einem Netz von Quadraten (je 10 mm Seitenlänge) versehen.

Fig. 216, Tafel XIV, giebt in ungefähr halber Grösse die obere Fläche (Seite der gezogenen Fasern) mit der Bruchlinie wieder. Die Formänderung der ursprünglichen Quadrate zeigt volle Uebereinstimmung mit der in § 62 angestellten Betrachtung, ebenso mit dem Ergebnisse, zu welchem wir in § 63, hinsichtlich des Verlaufs der Bruchlinie gelangt waren. Fig. 217, Tafel XV, stellt die untere Fläche (Seite der gedrückten Fasern) und Fig. 218, Tafel XIII, die Seitenansicht dar. In diesen drei Abbildungen

Fig. 216.

Taf. XIV.

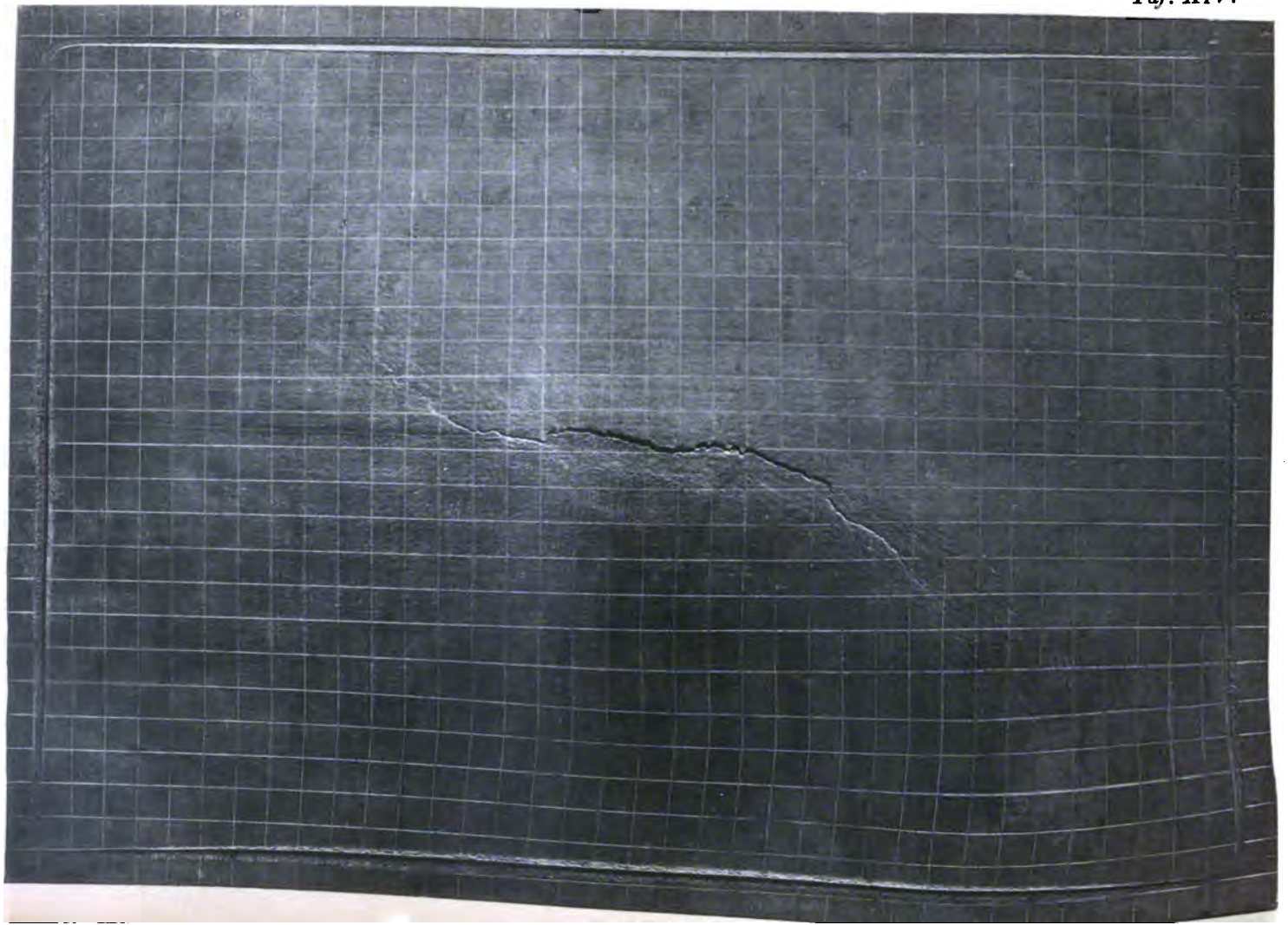
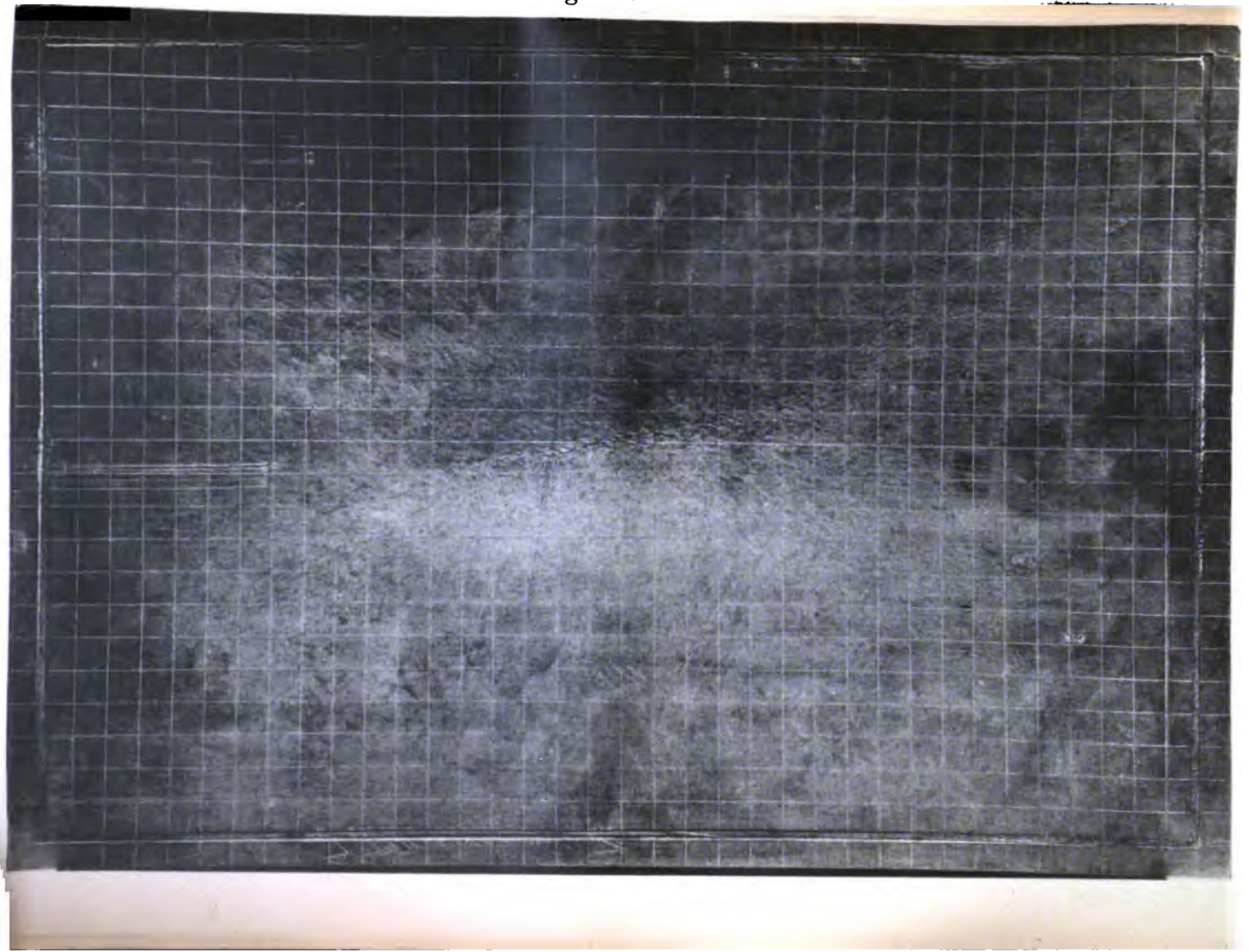


Fig. 217.



bietet sich dem Auge ein ausserordentlich lehrreiches Bild über das Verhalten des Materials einer rechteckigen Platte an den verschiedenen Stellen bei Beanspruchung durch Flüssigkeitsdruck.

Wird eine rechteckige, sorgfältig bearbeitete Platte, welche das Widerlager im ganzen Umfange $2(a + b)$ berührt, in der Mitte belastet, so heben sich die Ecken sichtbar vom Widerlager ab, derart, dass in den vier Seiten nur der mittlere Theil aufliegt, wie dies Fig. 219 für eine quadratische Platte darstellt. Die Grösse

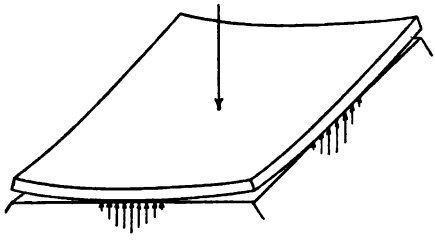


Fig. 219.

dieser in der Mitte jeder Umfangsseite liegenden Berührungsstrecke, innerhalb welcher die Pressung von der Mitte nach aussen hin bis auf Null abnimmt, hängt von der Belastung ab und wird schliesslich auch von der örtlichen Zusammendrückung beeinflusst, die das Material erfährt.

Das Lichtdruckbild, Fig. 216, Taf. XIV, zeigt durch das Auslaufen der Eindrückungen der Widerlager nach den Ecken hin deutlich die Abnahme der Pressung auch für den Fall gleichmässig über die Platte vertheilter Belastung durch Flüssigkeitsdruck; in der einen Ecke verschwindet die Eindrückung ganz, obgleich scharfes Anziehen der Schrauben des Versuchsapparates nothwendig war, um die Abdichtung zu sichern. Der Auflagerdruck selbst ist in den Mitten der langen Seiten des Rechtecks grösser als in denjenigen der kurzen Seiten; je mehr a von b abweicht, um so bedeutender fällt dieser Unterschied aus.

Hinsichtlich des Einflusses, welchen diese Veränderlichkeit der Widerlagspressung auf die Inanspruchnahme der etwaigen Befestigungsschrauben u. s. w. hat, sei auf die Fussbemerkung S. 408 verwiesen.

2. Gesetz der Widerstandsfähigkeit.

Die Beziehungen 271, 276, 280, 282, 286, 287, 288, 289, 290, 291 und 292 liefern übereinstimmend die Widerstandsfähigkeit **ebener** Platten proportional dem Quadrate der Stärke h. Die Versuche des Verfassers bestätigen die Richtigkeit dieses Gesetzes[1]).

Wenn sich bei Belastung von Platten durch Flüssigkeitsdruck, wobei diese zum Zwecke der Abdichtung stark angepresst werden müssen, ergiebt, dass stärkere Platten etwas weniger widerstandsfähig sind, als nach Massgabe des quadratischen Verhältnisses der Wanddicken zu erwarten ist[2]), so liegt das in dem Einfluss der Abdichtungskraft, d. h. derjenigen Kraft, mit welcher die Platten behufs Abdichtung angepresst werden müssen, wie dies bereits am Schlusse von § 60, Ziff. 3 dargelegt wurde.

Haben sich aus genügend zähem Material bestehende Platten erheblich durchgebogen, sind sie also nicht mehr eben, sondern gewölbt, so besitzen sie in diesem gewölbten Zustande eine erheblich grössere Widerstandsfähigkeit als in ihrer ursprünglichen ebenen Form. Die Zähigkeit des Materials hat jedoch durch diese Ueberanstrengung abgenommen.

---

[1]) Hierauf aufmerksam zu machen, erscheint umsomehr angezeigt, nachdem die Clark'sche Berechnungsweise ebener Wandungen in neuester Zeit auch in die deutsche Literatur (Häder, Bau und Betrieb der Dampfkessel 1893, S. 78 u. f.) übergegangen ist. Nach derselben wäre die Widerstandsfähigkeit einer ebenen Wand proportional der ersten Potenz von h.

[2]) Vergl. z. B. das S. 98 der „Versuche über die Widerstandsfähigkeit ebener Platten" Gesagte im Zusammenhang mit der Feststellung auf S. 86 daselbst.

Bedeutung der in den Gleichungen auftretenden Buchstabengrössen.

A Formänderungsarbeit (§ 41 u. f.), Konstante.

a bei elliptischen Querschnitten die grosse Halbachse, bei elliptischen Platten die grosse Achse der Ellipse; die eine Seite eines rechteckigen Querschnitts, einer rechteckigen Platte; Seite des quadratischen Querschnitts, der quadratischen Platte; Abstand (unveränderlicher).

a_0 grosse Halbachse der inneren Begrenzung eines Ellipsenringes.

a_1 a_2 Abstände.

B Konstante.

b bei elliptischen Querschnitten die kleine Halbachse, bei elliptischen Platten die kleine Achse der Ellipse: die andere Seite eines rechteckigen Querschnitts, einer rechteckigen Platte; Seite eines regelmässigen Dreiecks oder Sechsecks; Breitenabmessung; Abstand (unveränderlicher).

b_0 kleine Halbachse der inneren Begrenzung eines Ellipsenringes; Breitenabmessung.

C_1 C_2 Integrationskonstante.

c_1 c_2 „ .

d Durchmesser im Allgemeinen, bei Hohlstäben der äussere Durchmesser.

d_0 innerer Durchmesser eines Hohlcylinders.

d_m mittler „ „ „ .

e e_1 e_2 Abstände, für gerade Stäbe s. § 16, für gekrümmte s. § 54.

e Kreishalbmesser.

$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ (§ 58, Gl. 232).

f Querschnitt.

f_0 f_1 Sonderwerthe von f.

f_b Querschnitt an der Bruchstelle des zerrissenen Stabes, dessen ursprünglicher Querschnitt die Grösse f besass.

G Eigengewicht.

H Horizontalkraft.

h Höhe eines Querschnitts, eines Prisma; Stärke einer Platte.

h_0 Höhenabmessung.

i Anzahl der Windungen einer Schraubenfeder.

K_z Zugfestigkeit (§ 3).
K Druckfestigkeit (§ 11).
K_b Biegungsfestigkeit (§ 22).
K_d Drehungsfestigkeit (§ 35).
K_s Schubfestigkeit (§ 15, § 40).
k_z zulässige Anstrengung gegenüber Zug.
k „ „ „ Druck.
k_b „ „ „ Biegung.
k_d „ „ „ Drehung.
k_s „ „ „ Schub.

l Länge des Körpers.
l_b die Länge, welche das ursprünglich l lange Stabstück nach dem Zerreissen besitzt.

M Moment im Allgemeinen.
M_A Moment im Punkt A (§ 18, Ziff. 3).
M_b biegendes Moment.
M_d drehendes Moment.
$\max(M_b)$ Grösstwerth von M_b.
M_u Moment, herrührend von den auf den Umfang einer Platte wirkenden Widerlagskräften (§ 60, Ziff. 2).

$M_\eta = \int_\eta^e 2\,y\,\eta\,d\eta$ statisches Moment s. § 39.

m Verhältniss der Längsdehnung zur Querzusammenziehung (§ 7); Koefficient (§ 33).

n Grösse einer Strecke; Koefficient.

P Zug- oder Druckkraft, Einzelkraft.
P_{max} Bruchbelastung.
P_0 Knickbelastung (§ 24).
p Belastung der Längeneinheit eines auf Biegung beanspruchten Stabes.
p, p_1, p_2, p_a, p_c Pressungen auf die Flächeneinheit (§ 60, § 53).
p_i Pressung im Inneren eines Hohlgefässes, für $p_a = 0$ innerer Ueberdruck.
p_a „ der das Hohlgefäss umschliessenden Flüssigkeiten, für $p_i = 0$ äusserer Ueberdruck.

Q gleichmässig über den gebogenen Stab vertheilte Last, Einzellast (§ 55, Ziff. 1).
$2\,Q$ Belastung eines Hohlcylinders auf die Längeneinheit (§ 55, Ziff. 2).

r Kreishalbmesser, Krümmungshalbmesser insbesondere der Mittellinie eines gekrümmten Stabes vor der Formänderung, Trägheitshalbmesser (§ 26).
r_1 r_2 Sonderwerthe von r (s. Fig. 178 bis 180).
r_i innerer Durchmesser eines Hohlcylinders, einer Hohlkugel.
r_a äusserer „ „ „ „ „ „ „ .

$\mathfrak{S}$ Sicherheitskoefficient gegenüber Knickung (§ 25).
S Schubkraft.
s Wandstärke.

u Umfang des Querschnittes.

V Volumen.

x beliebige Strecke, Abscisse.

y Koordinate, insbesondere Ordinate der elastischen Linie, Querschnittsabmessung.

y' Koordinate, Durchbiegung eines Stabes infolge des biegenden Momentes (§ 18), Zusammendrückung oder Verlängerung einer Schraubenfeder (§ 57).

y'' Durchbiegung eines Stabes infolge der Schubkraft (§ 52, Ziff. 2b).

W, W_a und W_b Widerlagskräfte (§ 61).

$Z = \int xy\,df$ (§ 21, Gl. 70).

z Koordinate; Abstand, Querschnittsabmessung.

z' Koordinate, Durchbiegung plattenförmiger Körper.

z_0' Sonderwerth von z'.

z_0 Schwerpunktsabstand (S. 112).

α Dehnungskoefficient (§ 2, § 12, reciproker Werth des Elasticitätsmodul), Winkel, Konstante.

α_0 Anstrengungsverhältniss (§ 48).

β Schubkoefficient (§ 29, reciproker Werth des Schubelasticitätsmodul), Winkel, insbesondere der elastischen Linie mit der ursprünglichen Stabachse (§ 18), Konstante.

$\beta_0 = \frac{k_b}{k_z}$ (§ 45, Ziff. 1).

γ Schiebung (§ 28), Gewicht der Volumeneinheit.

γ_{max} Grösstwerth der Schiebung γ.

ε verhältnissmässige Dehnung (§ 2).

ε' Sonderwerthe von ε.

ε_q „ Querdehnung (§ 7).

ε_0 „ Dehnung der Mittellinie (§ 54).

$\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3$ die Dehnungen in den drei Hauptrichtungen (§ 58).

ζ Aenderung von z (§ 58).

η Koordinate; Abstand, insbesondere eines Flächenelementes von der einen Hauptachse des Querschnitts.

Θ Trägheitsmoment eines Querschnitts im Allgemeinen, meist jedoch in Bezug auf die eine Hauptachse.

Θ' polares Trägheitsmoment eines Querschnitts.

$\Theta_1\ \Theta_2\ \Theta_x\ \Theta_y$ Trägheitsmomente in Bezug auf besonders bezeichnete Achsen.

ϑ verhältnissmässiger Drehungswinkel (§ 33, § 43).

ι Koefficient (§ 42).

$\varkappa$ Zerknickungskoefficient (§ 26).

$\varkappa = -\frac{1}{f}\int_c \frac{\eta}{r+\eta}\,df$ (§ 54).

λ gesammte Längenänderung eines Stabes.
λ' Dehnungsrest, bleibende Längenänderung.
λ'' sich wieder verlierende Längenänderung; Federung, wenn auf die Längeneinheit bezogen.

μ Koefficient, (§ 46), insbesondere Berichtigungskoefficient (§ 60, Ziff. 4, § 61 u. f.).
μ_0 Koefficient (§ 22, S. 112).

ξ Koordinate.

$\pi = 3{,}14159$.

ϱ Krümmungshalbmesser, insbesondere der elastischen Linie; Abstand eines beliebigen Querschnittselementes von der Drehungsachse (Gl. 103).
$\varrho_a\ \varrho_b$ Sonderwerthe von ϱ (§ 61).

σ Normalspannung (§ 1, § 29, erster Absatz).
σ_{max} Grösstwerth von σ.
$\sigma_1\ \sigma_2$ Sonderwerthe von σ.
$\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z$ Normalspannungen in Richtung der x-Achse, bezw. y- und z-Achse.
$\sigma_a\ \sigma_b$ grösste Normalspannung im Streifen von der Länge a, bezw. b (§ 61).

τ Schubspannung (§ 29).
τ_{max} Grösstwerth von τ bei Schub (§ 38, § 39).
τ_1 Sonderwerth von τ.
τ_y Schubspannung senkrecht zur Richtung der y-Achse.
τ_z „ „ „ „ „ „ z- „
τ' „ an näher bestimmter Stelle.
$\tau_y'\ \tau_z'$ die Werthe von τ_y und τ_z an einer solchen Stelle.
$\tau_s\ \tau_d$ Schubspannungen, unterschieden je nachdem sie von der Schubkraft oder vom drehenden Moment hervorgerufen werden.
τ'_{max} Schubspannung in den Endpunkten der kleinen Halbachse eines elliptischen Querschnitts.
τ'_a Schubspannung in den Mitten der langen Seiten eines rechteckigen Querschnitts.
τ'_b Schubspannung in den Mitten der kurzen Seiten eines rechteckigen Querschnitts.

φ Dehnung des zerrissenen Stabes in Procenten (§ 8); Winkel (von veränderlicher Grösse), Koefficient (§ 34).

ψ Querschnittsverminderung des zerrissenen Stabes in Procenten (§ 8); Winkel, Koefficient (§ 35, Ziff. 2, § 60, Ziff. 4).

ω Befestigungskoefficient (§ 24, § 25), Winkel.
Verhältnissmässige Aenderung des Querschnittswinkels (§ 54).

Verlag von Julius Springer in Berlin N.

Versuche über die Widerstandsfähigkeit von Kesselwandungen.

Von

C. Bach,

Professor des Maschinen-Ingenieurwesens an der K. Technischen Hochschule Stuttgart.

I. Heft. **Wasserkammerplatten von Wasserröhrenkesseln.**

Mit 77 in den Text gedruckten Abbildungen.

Preis M. 2,40.

II. Heft. **Die Berechnung flacher, durch Anker oder Stehbolzen unterstützter Kesselwandungen, und die Ergebnisse der neuesten hierauf bezüglichen Versuche.**

Die auf der Kaiserlichen Werft in Danzig von 1887 bis 1892 ausgeführten Versuche über die Widerstandsfähigkeit von Flammrohren.

Mit 56 in den Text gedruckten Abbildungen und 2 Tafeln.

Preis M. 8,—.

Versuche über Ventilbelastung und Ventilwiderstand.

Von

C. Bach,

Professor des Maschinen-Ingenieurwesens an der K. Technischen Hochschule Stuttgart.

Mit 5 lithographirten Tafeln.

Preis M. 3,—.

Versuche über die Widerstandsfähigkeit ebener Platten.

Von

C. Bach,

Professor des Maschinen-Ingenieurwesens an der K. Technischen Hochschule Stuttgart.

Mit in den Text gedruckten Abbildungen.

Preis M. 2,—.

Die praktische Anwendung der Schieber- und Coulissensteurungen

von

William S. Auchincloss, C. E.,

mem. amr. soc. civ. eng.

Autorisirte deutsche Uebersetzung und Bearbeitung

von

A. Müller, Oberingenieur.

Mit 18 lithograph. Tafeln und zahlreichen Holzschnitten.

Preis gebunden in Leinwand M. 8,—.

Die Forth-Brücke.

Von

Prof. G. Barkhausen.

Mit Textfiguren und 9 lithographirten Tafeln.

Preis geb. M. 8,—.

Leitfaden zur Eisenhüttenkunde.

Ein Lehrbuch für den Unterricht an technischen Lehranstalten, sowie für Meister und Unterbeamte auf Hüttenwerken.

Von

Th. Beckert.

Mit 155 Holzschnitten und 3 lithographirten Tafeln.

Preis M. 9.—; geb. in Leinwand M. 10,—.

Die Entwickelung der Schiffsmaschine in den letzten Jahrzehnten.

Von

Carl Busley,

Professor an der Kaiserlichen Marine-Akademie zu Kiel.

Mit 157 Textabbildungen und 5 lithogr. Tafeln.

Dritte durchgesehene Auflage. — Preis geb. M. 12,—.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Verlag von Julius Springer in Berlin N.

Die Pumpen.

Berechnung und Ausführung der für die Förderung von Flüssigkeiten gebräuchlichen Maschinen.

Von

Konrad Hartmann.

Mit 585 Textfiguren und 6 Tafeln.

Preis geb. in Leinwand M. 16,—.

Die Wirkungsweise der Rektificir- und Destillir-Apparate

mit Hülfe einfacher mathematischer Betrachtungen,

dargestellt von

E. Hausbrand, Ober-Ingenieur.

Mit 4 Textfiguren und 14 Tafeln nebst 18 Tabellen.

Preis M. 5,—; geb. in Leinwand M. 6,—.

Der Kafill-Desinfektor.

Apparat zum Sterilisiren und Austrocknen von Thierleichen, Fleischabfällen und dergl. unter Gewinnung von Fett, Leim und Dungpulver. D.R.P. No. 59 349.

Von

R. Henneberg.

Mit 2 Tafeln. — Preis M. 1,—.

Hilfsbuch für Dampfmaschinen-Techniker.

Mit einem theoretischen Theil.

Unter Mitwirkung von Adalbert Káš, a. o. Professor an der k. k. Bergakademie in Pribram, herausgegeben

von

Josef Hrabák,

Oberbergrath und Professor an der k. k. Bergakademie in Pribram.

Mit in den Text gedruckten Figuren.

Zweite, wesentlich vermehrte und verbesserte Auflage.

Preis gebunden in Leinwand M. 16,—.

Die Gebläse.

Bau und Berechnung der Maschinen zur Bewegung, Verdichtung und Verdünnung der Luft.

Von

A. von Ihering,

Regierungsbaumeister, Docent an der Königl. Technischen Hochschule zu Aachen.

Mit 464 Abbildungen im Text und 3 Tafeln.

Preis gebunden in Leinwand M. 20,—.

Die Kraftmaschinen des Kleingewerbes.

Von

J. O. Knoke.

Mit 294 Figuren. — Preis gebunden in Leinwand M. 10,—.

Die Aufbereitung der Erze.

Handbuch für ausübende und angehende Berg-Ingenieure

von

C. Linkenbach, Ingenieur.

Mit 24 lith. Tafeln. — Preis gebunden in Leinwand M. 24,—.

Neuere Wasserwerksmaschinen

von

A. Riedler,

Professor an der Königlichen Technischen Hochschule zu Berlin.

Mit 78 Textabbildungen und 3 lith. Tafeln.

Preis M. 4,—.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Verlag von Julius Springer in Berlin N.

Leitfaden
zum
Berechnen und Entwerfen von Lüftungs- und Heizungs-Anlagen.
Auf Anregung Seiner Excellenz des Ministers der öffentlichen Arbeiten verfasst
von
Hermann Rietschel,
Geh. Reg.-Rath, Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu Berlin.
Zwei Bände.
Zweite, durchgesehene Auflage.
Mit 48 Textfiguren, Tabellen und 22 lithograph. Tafeln.
Preis gebunden in Leinwand M. 8,—.

Der Dampfkessel-Betrieb.
Allgemeinverständlich dargestellt.
Von
E. Schlippe,
Königl. Gewerbe-Inspektor zu Chemnitz.
Zweite Auflage.
Mit zahlreichen in den Text gedruckten Abbildungen.
Preis gebunden in Leinwand M. 5,—.

Anleitung
zur
statischen Berechnung von Eisenkonstruktionen im Hochbau.
Von
H. Schloesser, Civil-Ingenieur.
Mit in den Text gedruckten Holzschnitten und einem Plan.
Zweite, neu bearbeitete und verbesserte Auflage.
Preis gebunden in Leinwand M. 7,—.

Lehrbuch der allgemeinen Hüttenkunde.
Von
Dr. Carl Schnabel,
Königl. Preuss. Bergrath, Professor der Hüttenkunde und chemischen Technologie an der Königl. Bergakademie zu Clausthal.
Mit 533 Abbildungen.
Preis M. 16,— ; gebunden in Leinwand M. 17,20.

Handbuch der Metallhüttenkunde.
Von
Dr. Carl Schnabel,
Königl. Preuss. Bergrath, Professor der Hüttenkunde und chemischen Technologie an der Königl. Bergakademie zu Clausthal.
Erster Band:
Kupfer — Blei — Silber — Gold.
Mit 571 Abbildungen im Text. Preis M. 24,— ; in Leinwand gebunden M. 25,60.

Leitfaden zur Bergbaukunde.
Von
Dr. Albert Serlo, Oberberghauptmann.
Vierte verbesserte und bis auf die neueste Zeit ergänzte Auflage.
Mit 745 Holzschnitten und 32 lith. Tafeln.
In zwei Bänden.
Preis gebunden in 2 Leinwandbänden M. 32,40; gebunden in 2 Halblederbänden M. 33,50.

Anwendung des Falkenburgschen Diagrammes
auf die
Konstruktion der einfachen und Doppelschieber-Steuerungen
bearbeitet von **Adolf Seybel,** Ingenieur.
Mit 14 Tafeln. — Preis M. 4,—.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

b89080442171
b89080442171a